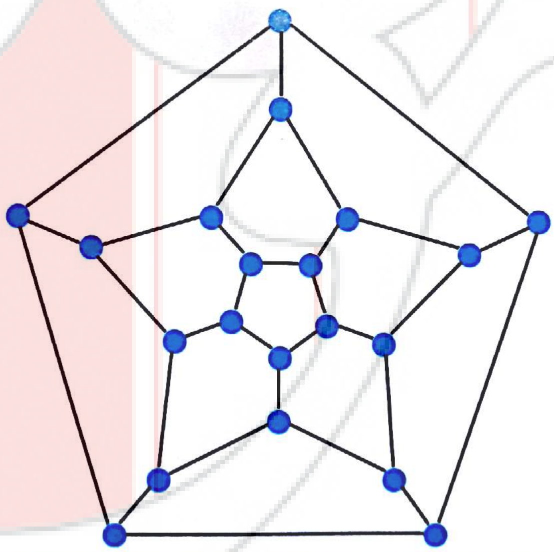
# ریاضیات گسسته

پیش‌دانشگاهی (رشته‌ی علوم ریاضی)

مجموعه کتاب‌های آیه‌های تمدن

مؤلف:
امیر پناهی‌فر



## اصل خوش ترتیبی

هر زیر مجموعه ناتهی از اعداد طبیعی دارای کوچک‌ترین عضوه یعنی اگه $S \neq \mathbb{N}$ و $S \neq \varnothing$ اونوقت عضوی از $S$ مانند $S_{\circ}$ وجود داره که به ازای هر $s$ متعلق به $S$ داریم: $S_{\circ} \leq S$

**توجه! با پذیرفتن اصل خوش ترتیبی می‌تونیم اصل استقرای ریاضی رو نتیجه بگیریم و بالعکس.**

## اصل استقرای ریاضی

هر زیر مجموعه‌ی $S$ از $N$ که دارای دو خاصیت زیر باشه با مجموعه‌ی $N$ برابره

الف) $۱ \in S$

ب) هرگاه $n \in S \Leftarrow$ اونوقت $n+۱ \in S$

## اصل استقرای قوی ریاضی

هر زیر مجموعه‌ی $S$ از $N$ که دارای دو خاصیت زیر باشه با مجموعه $N$ برابره

الف) $۱ \in S$

ب) اگه اعداد طبیعی کوچک‌تر از $n$ تو $S$ باشن اونوقت $n \in S$.

**نکته تو درس:** ***اصل استقرای قوی ریاضی با اصل استقرای ریاضی و در نتیجه با اصل خوش ترتیبی معادل است.***

**کدام یک از مجموعه‌های زیر خوش ترتیبی است؟**

۱) $A = \{x | x \in Q^{+} \cup \{۰\}\}$ ۲) $B = \{x | x \in [۳, ۴)\}$

۳) $B = \{x | x \in \mathbb{Z}^{+} \cup \{۰\}\}$ ۴) $D = Q$

**پاسخ:** مجموعه‌ی $C$ همون $\mathbb{N} \cup \{۰\}$ است و لذا هر زیر مجموعه غیر تهی از اون دارای عضو ابتداست ولی تو بقیه گزینه‌ها چنین چیزی وجود نداره. پس **گزینه‌ی (۳)** صحیحه.

**در اصل استقرای تعمیم یافته برای حکم $۴^{n} < (n+۱)!\,,\ n \geq m$ عددی طبیعی مناسب $m$ کدام است؟**

**(سراسری ریاضی - ۸۱)**

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

**پاسخ: گزینه‌ی (۳) صحیحه.**

$n = ۴ \to ۴^{۴} < (۴+۱)! \Rightarrow ۴^{۴} < ۵! \Rightarrow ۲۵۶ \not< ۱۲۰$

$n = ۵ \to ۴^{۵} < ۶! \Rightarrow ۱۰۲۴ \not< ۷۲۰$

$n = ۶ \to ۴^{۶} < ۷! \Rightarrow ۴۰۹۶ < ۵۰۴۰ \to$ نقطه شروع استقرا

**کدام یک از مجموعه‌های زیر خوش ترتیب نیست؟**

۱) $Q^{+} \cap Z$ ۲) $Q \cap Z^{+}$ ۳) $R \cap Q^{+}$ ۴) $N \cup \{-۱, -۲\}$

**پاسخ:** چون گزینه‌ی ۱ و ۲ همون مجموعه اعداد طبیعین پس خوش ترتیبن و گزینه‌ی ۴ هم خوش ترتیبه ولی گزینه‌ی ۳ که $R \cap Q^{+} = Q^{+}$ هس خوش ترتیب نیس. پس **گزینه‌ی (۳)** صحیحه.

## بخش‌پذیری

عدد صحیح $a$ رو به عدد صحیح $b \neq ۰$ بخش‌پذیر می‌گیم هروقت عدد صحیح مانند $q$ یافت شه $a = bq$ اونوقت می‌نویسیم $b|a$ و می‌خونیم $b$ عدد $a$ رو می‌شماره (عادی می‌کنه) و هرگاه $a$ بر $b$ بخش‌پذیر نباشه می‌نویسیم $b \nmid a$.

مثل: $۳ \times ۲ = ۶$ یا $۲|۶$

## ویژگی‌های بخش‌پذیری

۱) $a \mid a$

۲) $0 \mid 0$

۳) $a \mid 0$

۴) $\pm 1 \mid a$

۵) $a \mid b \Rightarrow \begin{cases} -a \mid b \\ a \mid -b \\ -a \mid -b \end{cases}$

۶) $a \mid b \Leftrightarrow ma \mid mb \ (m \neq 0)$

*۷) $a \mid b \Rightarrow a \mid mb$

۸) $\left.\begin{matrix} a \mid b \\ c \mid d \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac \mid bd$

۹) $\left.\begin{matrix} a \mid b \\ b \mid a \end{matrix}\right\} \Rightarrow |a| = |b|$

۱۰) $\left.\begin{matrix} a \mid b \\ b \neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |a| \leq |b|$

۱۱) $ab \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid c \\ b \mid c \end{cases}$

۱۲) $\left.\begin{matrix} a \mid b \\ b \mid c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid c$

*۱۳) $\left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid mb + nc$

۱۴) $a \mid b \Rightarrow a \mid b + na$

۱۵) $a \mid b \Leftrightarrow a^n \mid b^n \qquad n \in \mathbb{N}$

۱۶) $\left.\begin{matrix} a \mid b \\ n \leq m \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^n \mid b^m$

۱۷) $\left.\begin{matrix} a^n \mid b^m \\ n \geq m \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \mid b$

۱۸) $a - b \mid a^n - b^n \qquad n \in \mathbb{N}$

۱۹) $a + b \mid a^n + b^n$ $\qquad$ $n$ فرد

۲۰) $a + b \mid a^n - b^n$ $\qquad$ $n$ زوج

۲۱) $a!\,b! \mid (a+b)!$

**مثال** ثابت کنید اگر $a \mid b$ آن‌گاه $a \mid mb$.

حل: اگه $a \mid b$ یعنی $b = aq$ پس:

$$b = aq \xrightarrow{\times m} mb = a(mq) \Rightarrow mb = aq' \Rightarrow a \mid mb$$

**مثال** ثابت کنید اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ آن‌گاه: $ac \mid bd$.

حل: می‌دونیم: $\begin{cases} a \mid b \to b = aq \\ c \mid d \to d = cq' \end{cases}$ پس:

$$\begin{matrix} b = aq \\ d = cq' \end{matrix} \xrightarrow{\times} bd = ac(qq') \Rightarrow bd = act \Rightarrow ac \mid bd$$

**مثال** ثابت کنید اگر $6!\,8! \mid 14!$.

حل: میدونیم $\binom{14}{6}$ متعلق به اعداد طبیعیه پس:

$$\binom{14}{6} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{14!}{6!\,8!} \in \mathbb{N} \Rightarrow 6!\,8! \mid 14!$$

یعنی: $a!\,b! \mid (a+b)!$.

**مثال** ثابت کنید حاصل‌ضرب هر سه عدد متوالی بر $3!$ بخش‌پذیر است.

حل:

$$\binom{n}{3}\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{n!}{3!(n-3)!}\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!}\in\mathbb{N}\Rightarrow 3!|n(n-1)(n-2)$$

دقت کن این مسئله رو می‌تونیم به اعداد دیگه هم تعمیم بدیم.

**مثال** اگر $a$ عددی فرد باشد ثابت کنید: $8|a^2-1$.

حل: می‌دونیم هر عدد فرد به صورت $a=2k+1$ نوشته می‌شه پس:

$$a=2k+1\Rightarrow \text{به توان ۲}\ a^2=4k^2+4k+1\Rightarrow a^2-1=4k^2+4k\Rightarrow a^2-1=\underbrace{4k(k+1)}$$

حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی بر $2!$ بخش‌پذیر است.

$$\Rightarrow a^2-1=4\times 2!\,t\Rightarrow a^2-1=8t\Rightarrow 8|a^2-1$$

**مثال** اگر $a$ عددی صحیح باشد ثابت کنید: $12|a^5+a^4-a^3-a^2$

حل:

$$\underline{a^5}+\underline{\underline{a^4}}-\underline{\underline{a^3}}-\underline{a^2}=a^3(a^2-1)+a^2(a^2-1)=(a^2-1)(a^3+a^2)=(a^2-1)(a^2)(a+1)$$

$$=\underbrace{(a-1)\,a\,(a+1)}_{\text{مضرب }3!\text{ یعنی }6k}\qquad\underbrace{a(a+1)}_{\text{مضرب ۲ یعنی }2q}\qquad=6k\times 2g=12kg=12t\Rightarrow 12|a^5+a^4-a^3-a^2$$

**مثال** ثابت کنید اگر $a|b$ و $b|c$ آن‌گاه: $a|c$.

حل: می‌دونیم اگه $a|b$ یعنی $b=aq$ و $b|c$ یعنی $c=bq'$ پس:

$$\begin{matrix}a|b\Rightarrow b=aq\\ b|c\Rightarrow c=bq'\end{matrix}\Rightarrow c=a\,qq'\Rightarrow c=aq''\Rightarrow a|c$$

**مثال** ثابت کنید اگر $a|b$ و $a|c$ آن‌گاه $a|mb\pm nc$.

حل:

$$\left.\begin{matrix}a|b\Rightarrow b=aq\xrightarrow{\times m}mb=aqm\\ a|c\Rightarrow c=aq'\xrightarrow{\times n}nc=naq'\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\pm}mb\pm nc=a(qm\pm nq')$$

$$\Rightarrow mb\pm nc=aq''\Rightarrow a|mb+nc$$

**مثال** اگر $3|a-b$ ثابت کنید $3|7a+2b$.

حل:

$$3|a-b:\ \left.\begin{matrix}3|6\Rightarrow 3|6a\\ 3|3\Rightarrow 3|3b\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}3|6a+3b\\ \text{از طرفی}\quad 3|a-b\end{matrix}\right\}\Rightarrow 3|a-b+6a+3b\Rightarrow 3|7a+2b$$

**مثال** چند عدد صحیح مانند $n$ وجود دارد که: $6|n+2$.

حل: می‌دونیم عدد ۶ هشت مقسوم علیه داره یعنی: $D_6=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$ پس:

$$n+2\begin{cases}=\ \pm1\\ =\ \pm2\\ =\ \pm3\\ =\ \pm6\end{cases}\Rightarrow n=\{-1,-3,0,-4,1-5,4,-8\}$$

یعنی $n$ میتونه ۸ مقدار صحیح مختلف بگیره.

**مثال** چند عدد صحیح مثل $n$ وجود دارد که: $n-3|2n+3$.

حل: واس حل این سوال چند تا راه داریم که دو تا شو میگم:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{2n}+3 & n-3 \\ \hline -\cancel{2n}+6 & 2 \\ \hline +9 & \end{array} \qquad \frac{2n+3}{n-3}=2+\frac{9}{n-3}$$

یعنی حالا باید $n-3|9$ و مقسوم علیه‌های ۹ هستن $D_9=\{\pm1,\pm3,\pm9\}$ حالا مث سؤال قبل داریم:

$$n-3=\begin{cases}\pm1\\ \pm3\\ \pm9\end{cases} \Rightarrow n=\{4,2,6,0,12,-6\}$$

**نکته تو درس:** ***روش تستی: مثل روشی که تو کتاب حسابان داشتیم مقسوم علیه را مساوی صفر قرار میدیم و بعد جوابو تو مقسوم قرار میدیم یعنی:*** $n-3=0 \Rightarrow n=3 \Rightarrow 2n+3 \xrightarrow{n=3} 2(3)+3=9$ ***یعنی*** $n-3|9$ ***که از اینجا به بعد مثل روش ۱ عمل می‌کنیم.***

*در نهایت برای $n$ شش عدد صحیح مختلف وجود داره.*

**تست** **به ازای چند مقدار طبیعی $n$ داریم: $(n+2)|(n^2-1)$.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ:** گزینه‌ی(۱) . **روش اول:**

$$\left.\begin{array}{ll}\text{می دونیم} & \Rightarrow (n+2)|(n^2-1)\\ \text{از طرفی} & \Rightarrow n+2|n+2 \Rightarrow n+2|n(n+2)\end{array}\right\} \Rightarrow n+2|n(n+2)-(n^2-1) \Rightarrow n+2|2n+1$$

$$\left.\begin{array}{ll} & n+2|2n+1\\ \text{از طرفی} & n+2|n+2\end{array}\right\} \Rightarrow n+2|2n+1-2(n+2) \Rightarrow n+2|2n+1-2n-4 \Rightarrow n+2|-3$$

$$\overset{*}{\Rightarrow}\begin{cases}n+2=\pm1\\ n+2=\pm3\end{cases} \Rightarrow n=-1,-3,-5,\boxed{1} \rightarrow$$ تنها یک عدد طبیعی وجود داره

**روش دوم:** از نکته تو درس قبلی برو یعنی: $n+2=0 \Rightarrow n=-2$

$$n+2|(-2)^2-1 \Rightarrow n+2|3$$

از اینجا به بعد مثل * در روش اول میشه.

**تست** **بر روی منحنی تابع $y=\dfrac{2x+1}{x+3}$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

**پاسخ:** گزینه‌ی (۲)

$$y=\frac{2x+1}{x+3}\in\mathbb{Z} \Rightarrow y=\frac{2x+6-5}{x+3}\in\mathbb{Z} \Rightarrow y=2-\frac{5}{x+3}\in\mathbb{Z} \Rightarrow x+3|5$$

$$x+3=\begin{cases}\pm1\\ \pm5\end{cases} \Rightarrow x=\{-2,-4,2,-8\}$$ چهار مقدار برای $x$ داریم

**تست** **چند نقطه با مختصات صحیح بر منحنی به معادله‌ی $xy+y+x^2+2x=0$ وجود دارد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ: گزینه‌ی (۳)** برای حل این سؤال اول $y$ رو تنها می‌کنیم یعنی:

$$xy+y=-2x-x^2 \Rightarrow y(x+1)=-2x-x^2 \Rightarrow y=\frac{-2x-x^2}{x+1}$$

**حواستو جمع کن مهندس!** هم میتونی مثل سوال قبل حلش کنی هم میتونی از راه تستی زیر بری:

**مخرج = ۰ → ریشه در صورت ⇒ ریشه در صورت | مخرج**

$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow -2x-x^2 \xrightarrow[x=-1]{\text{به ازای}} -2(-1)-(-1)^2=1 \Rightarrow x+1|1$

$\Rightarrow x+1= \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$ → x دو مقدار صحیح داره

**چند عدد طبیعی مانند n داریم که $\frac{n^2+5}{n}\in\mathbb{N}$؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ:** گزینه‌ی (۲)

$\frac{n^2+5}{n}=n+\frac{5}{n} \Rightarrow n=1$ یا ۵ → ۲ عدد طبیعی وجود داره.

**نکته تو درس:** *اینجا لازمه یه نکته از کتاب حسابان رو یادآوری کنم. یادت میاد:*

۱) $a-b|a^n-b^n \ (n\in\mathbb{N})$

۲) $a+b|a^n+b^n \ (n=2k+1)$

۳) $a+b|a^n-b^n \ (n=2k)$

۴) $a-b \nmid a^n+b^n$

**باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $5^{24}-3^{24}$ بر ۳۴ کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱۶ ۴) ۲

می‌دانیم ⇒ $5^{24}-3^{24}=(5^2)^{12}-(3^2)^{12}=25^{12}-9^{12}$

**پاسخ:** گزینه‌ی (۱). با توجه به نکته‌ی قبل چون ۱۲ زوجه پس عدد $25^{12}-9^{12}$ به عدد $(9+25)=34$ بخش‌پذیره.

**عدد $2^7+9^7$ بر کدام عدد زیر همواره بخش‌پذیر است؟**

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۲

**پاسخ:** گزینه‌ی (۳) با توجه به نکته‌ی قبل:

n فرد → $a+b|a^n+b^n \Rightarrow 11=2+9|2^7+9^7$

**عدد $2^{24}-1$ برابر کدام مقدار زیر است؟**

۱) ۱۶۷۷۷۲۱۵ ۲) ۱۶۷۸۸۲۱۵ ۳) ۱۶۷۷۶۲۳۴ ۴) ۱۶۷۷۷۲۲۵

**پاسخ:** گزینه‌ی (۱)

عبارت $2^{24}-1$ رو تجزیه می‌کنیم:

$2^{24}-1=(2^{12}-1)(2^{12}+1)=(2^6-1)(2^6+1)(2^{12}+1)=(2^3-1)\underbrace{(2^3+1)}_{9}(2^6+1)(2^{12}+1)=9q$

$9|2^{24}-1 \Rightarrow 3|2^{24}-1 \xrightarrow{\text{مضرب ۳}}$ گزینه‌ی ۱ یا ۳

از طرفی ⇒ $2^{24}-1=(2^8)^3-1=\underbrace{(2^8-1)}_{255}((2^8)^2+2^8+1)=\underbrace{255q}_{\text{مضرب ۵}}$ → گزینه‌ی ۱

## قواعد بخش‌پذیری بر برخی اعداد مهم

**تو این بخش قواعد بخش‌پذیری بر چند عدد مهمو فهرست‌وار بیان می‌کنم:**

۱- عددی بر ۲ یا ۵ یا ۱۰ بخش‌پذیره که اولین رقم سمت راستش (رقم یکان) بر ۲ یا ۵ یا ۱۰ بخش‌پذیر باشه.

۲- عددی بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیره که مجموع ارقام آن بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر باشه.

۳- عددی بر ۴ بخش‌پذیره که:

الف) دو رقم سمت راست اون بر ۴ بخش‌پذیر باشه.

ب) رقم یکان به علاوه دو برابر رقم دهگانش بر ۴ بخش‌پذیر باشه.

۴- عددی بر ۶ بخش‌پذیره که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشه.

۵- عددی بر ۷ بخش‌پذیره که:

الف) رقم یکان او رو تو ۲ ضرب و حاصل رو از بقیه عدد کم کنیم ، عدد حاصل بر ۷ بخش‌پذیر باشه.

ب) از سمت راست سه رقم، سه رقم جدا کرده و یک در میان مثبت و منفی کنیم عدد حاصل بر ۷ بخش‌پذیر باشه.

۶- عددی بر ۸ بخش‌پذیره که:

الف) سه رقم سمت راست اون بر ۸ بخش‌پذیر باشه.

ب) رقم یکان به علاوه دو برابر دهگان به علاوه چهار برابر صدگان اون بر ۸ بخش‌پذیر باشه.

**نکته تو درس:** ***به طور کلی عددی بر $2^n$ یا $5^n$ یا $10^n$ بخش‌پذیر است که n رقم سمت راست آن بر $2^n$ یا $5^n$ یا $10^n$ بخش‌پذیر باشد.***

۷- عددی بر ۱۱ بخش‌پذیره که اگه از سمت راست یک رقم یک رقم جدا کرده و یک در میان مثبت و منفی کنیم عدد حاصل بر ۱۱ بخش‌پذیر باشه.

۸- عددی بر ۱۲ بخش‌پذیره که هم بر ۳ و هم بر ۴ بخش‌پذیر باشه.

۹- عددی بر ۱۳ بخش‌پذیره که:

الف) رقم یکان اون رو تو ۹ ضرب کرده و حاصل رو از بقیه عدد کم کنیم عدد حاصل بر ۱۳ بخش‌پذیر باشه.

ب) از سمت راست سه رقم، سه رقم جدا کرده و یک در میان مثبت و منفی کنیم عدد حاصل بر ۱۳ بخش‌پذیر باشه.

۱۰- عددی بر ۱۴ بخش‌پذیره که هم بر ۲ و هم بر ۷ بخش‌پذیر باشه.

۱۱- عددی بر ۱۵ بخش‌پذیره که هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش‌پذیر باشه.

۱۲- عددی بر ۱۶ بخش‌پذیره که:

الف) چهار رقم سمت راست اون بر ۱۶ بخش‌پذیر باشه.

ب) رقم یکان به علاوه دو برابر دهگان به علاوه چهار برابر صدگان به علاوه هشت برابر هزارگان اون بر ۱۶ بخش‌پذیر باشه.

۱۳- عددی بر ۱۷ بخش‌پذیره که اگه رقم یکان اون رو تو ۵ ضرب کرده و حاصل رو از بقیه عدد کم کنیم عدد حاصل بر ۱۷ بخش‌پذیر باشه.

۱۴- عددی بر ۲۷ یا ۳۷ بخش‌پذیره که از سمت راست سه رقم، سه رقم جدا کرده و همه‌ی اون‌ها رو با هم جمع کنیم عدد حاصل بر ۲۷ یا ۳۷ بخش‌پذیره.

**به ازای چه مقادیری از x عدد $\overline{528451x}$ بر ۶ بخش‌پذیر است؟**

۱) ۲ یا ۴ ۲) ۴ یا ۶ ۳) ۴ یا ۸ ۴) ۲ یا ۸

**پاسخ:** گزینه‌ی (۴) می‌دونیم عددی به ۶ بخش‌پذیر باشه که هم به ۲ و هم به ۳ بخش‌پذیر باشه پس اولاً باید زوج باشه بعدشم باید مجموع ارقامش یعنی $x+25$ به ۳ بخش‌پذیر باشه که در نتیجه x میتونه ۲ یا ۸ باشه.

**اگر عدد طبیعی $\overline{abbax}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد برای x چند جواب وجود دارد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ:** گزینه‌ی (۲). می‌دونیم عددی به ۱۱ بخش‌پذیره که از سمت راست ۱ رقم ۱ رقم جدا کرده و یک در میان مثبت و منفی کنیم به ۱۱ بخش‌پذیر باشه.

$$\left.\begin{array}{r} x - \cancel{a} + \cancel{b} - \cancel{b} + \cancel{a} = x \\ 11 \mid x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0$$

یک جواب

**اگر عدد ۸ رقمی $\overline{aaaaaaaa}$ بر ۷ بخش‌پذیر باشد برای a چند جواب دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۷ ۴) ۱۰

**پاسخ:** گزینه‌ی (۱). می‌دونیم عددی به ۷ بخش‌پذیره که از سمت راست ۳ رقم ۳ رقم جدا و یک در میان مثبت و منفی کنیم به ۷ بخش‌پذیر باشه.

$$\left.\begin{array}{r}\cancel{\overline{aaa}}-\cancel{\overline{aaa}}+\overline{aa}=\overline{aa}\\ 7|\overline{aa}\end{array}\right\}\Rightarrow a=7$$

**حواستو جمع کن!** a نمی‌تونه صفر باشه چون عدد ۸ رقمی نمیشه یک رقمی میشه.

**اگر عدد $\overline{56x2}$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد مجموعه جواب x کدام است؟**

۱) $\{1,3,4,5,7,9\}$ ۲) $\{1,3,5,7,9\}$ ۳) $\{1,2,3,5,7,9\}$ ۴) $\{3,5,7,9\}$

**پاسخ:** گزینه‌ی (۲). یادمونه که قاعده بخش‌پذیری بر ۴، یکان + ۲ برابر دهگان بخش‌پذیر بر چهاره

$2+2x=4k \Rightarrow 1+x=2k \Rightarrow x=2k-1$ یعنی x تمامی ارقام فرد میتونه باشه.

**اگر عدد $\overline{2xy2}$ بر ۶ بخش‌پذیر باشد ماکزیمم مقدار $x+y$ کدام است؟**

۱) ۱۷ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

**پاسخ:** گزینه‌ی (۱). عددی به ۶ بخش‌پذیره که به ۲ و ۳ بخوره چون یکان زوجه پس:

$2+x+y+2=x+y+4$ باید به ۳ بخش‌پذیر بشه یعنی $x+y$ میتونه ۲ و ۵ و ۸ و ۱۱و ۱۴و ۱۷ باشه که با توجه به گزینه‌ها ماکزیمم اون ۱۷ میشه.

**اگر عدد $\overline{24x25}$ بر ۱۲۵ بخش‌پذیر باشد، مجموعه مقادیر x کدام است؟**

۱) $\{1,6,8\}$ ۲) $\{1,6,5\}$ ۳) $\{1,6,7\}$ ۴) $\{1,6\}$

**پاسخ:** گزینه‌ی (۴). عددی به $5^3=125$ بخش‌پذیره که ۳ رقم راستش به ۱۲۵ بخوره. پس x میتونه ۱ یا ۶ باشه.

**اگر عدد ۹ رقمی $\overline{aaaaaaaaa}$ بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد برای a چند جواب وجود دارد؟**

۱) صفر ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۵

**پاسخ:** گزینه‌ی (۳) عددی به ۳۷ بخش‌پذیره که اگه از سمت راست ۳ رقم ۳ رقم جدا و همرو با هم جمع کنیم به ۳۷ بخش‌پذیره.

$$\overline{aaa}+\overline{aaa}+\overline{aaa}=3\overline{aaa}\Rightarrow 3\overline{aaa}=3(a+10a+100a)=3(111a)$$

چون ۱۱۱ بر ۳۷ بخش‌پذیره پ تو هر عددی ضرب بشه به ۳۷ می‌خوره یعنی a می‌تونه بین ۱ تا ۹ باشه.

($1\le a\le 9$) یعنی ۹ جواب {صفر قابل قبول نیست چون عدد ۹ رقمی نمیشها}

**عدد ۲۰۰۴ بر ۱۲ بخش‌پذیر است و حاصل جمع ارقامش ۶ است. روی هم چند عدد چهار رقمی با این دو ویژگی وجود دارد؟**

(ازمون کانگورو ۲۰۰۴)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵ ۵) ۱۸

**پاسخ:** گزینه‌ی (۵) چون جمع ارقامش ۶ هس پس کافیه بر ۴ بخش‌پذیر باشه تا به ۱۲ هم بخش‌پذیر شه، از طرفی عددی به ۴ می‌خوره که ۲ رقم سمت راستش به ۴ بخوره پس دو رقم سمت راست یکی از موارد: ۰۰ , ۱۲,۳۲ , ۴۰ , ۰۴, ۲۰ باید باشه (مثلاً ۴۴ نمی‌تونه باشد چون جمع ۴ رقم باید ۶ بشه) پس اعداد میشن:

۴۲۰۰,۲۴۰۰,۱۵۰۰,۵۱۰۰,۳۳۰۰,۶۰۰۰

۱۱۴۰, ۲۰۴۰,۱۱۰۴ ,۲۰۰۴ , ۴۰۲۰ ,۳۱۲۰ ,۱۳۲۰ ,۲۲۲۰ , ۱۲۱۲ ,۲۱۱۲, ۳۰۱۲ ,۱۰۳۲

که ۱۸ تا عدد میشه.

**ضرب دو عدد ۱۲۰ است و اختلاف ۲ عدد ۷ است. مجموع دو عدد چند است؟**

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

**پاسخ:** گزینه‌ی (۳) چون اختلاف دو عدد فرد شده حتماً یکی فرد و یکی زوجه:

$$\left.\begin{array}{r}۱۲۰=۵\times۳\times۸=۱۵\times۸\\ ۱۵-۸=۷\end{array}\right\}\Rightarrow ۱۵+۸=۲۳ \rightarrow$$ دو عدد ۱۵ و ۸ اند.

**در سبدی تعدادی تخم‌مرغ موجود است. اگر تخم‌مرغ‌های سبد را ۷ تا ۷ تا برداریم هیچ تخم‌مرغی در سبد نمی‌ماند. اگر ۲ تا ۲ تا برداریم یک تخم مرغ در سبد می‌ماند. اگر هربار ۳ تخم مرغ برداریم، ۲ تخم مرغ در سبد باقی می‌ماند. اگر هر بار ۴، ۵ یا ۶ تخم مرغ برداریم به ترتیب ۳، ۴، ۵ تخم مرغ باقی می‌ماند. کم‌ترین تعداد تخم مرغ‌های داخل سبد چند تاست؟**

۱) ۷۹ ۲) ۹۸ ۳) ۱۱۷ ۴) ۱۱۹

**پاسخ:** گزینه‌ی (۴) اول از همه کوچک‌ترین عددی که مضرب ۲ و ۳ و ۵ و ۴ هس رو بدست میاریم و یک واحد ازش کم می‌کنیم یعنی

$$۲,۳,۴,۵,۶ \xrightarrow{\text{ک.م.م}} ۶۰ \xrightarrow{-۱} ۵۹$$

باقی‌مانده این عدد (۵۹) به ۲و ۳و ۴و ۵و ۶ به ترتیب ۱و ۲و ۳و ۴و ۵ است!!

حالا اگر ۶۰ تا ۶۰ تا به این عدد اضافه کنیم تو باقی‌مانده‌ها تغییری ایجاد نمیشه ولی باید ببینیم کدومش به هفت بخش‌پذیر میشه:

$۵۹ \rightarrow$ به ۷ بخش‌پذیر نیست

$۵۹+۶۰=۱۱۹ \rightarrow$ به ۷ بخش‌پذیره

حالا از این تیپ سؤالا تو بخش همنهشتی بیش‌تر براتون حل می‌کنم!

## الگوریتم تقسیم

اگه a یک عدد صحیح و b یک عدد طبیعی باشه اونوقت اعداد صحیح منحصر به فردی مانند q و r وجود دارن به طوریکه:

مقسوم

مقسوم علیه

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline & q \end{array} \Rightarrow a=bq+r \quad , \quad \begin{cases} ۰\le r\le b-۱ \\ \text{یا} \\ ۰\le r<b \end{cases}$$

خارج قسمت

r

باقیمانده

**مثال** **اگر در یک تقسیم ۱۰۰ واحد به مقسوم و یک واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم و خارج قسمت تغییر نکند اما به باقی‌مانده ۴ واحد افزوده شود. خارج قسمت را تعیین کنید.**

حل:

$$\left.\begin{array}{l}a=bq+r\\ a+۱۰۰=(b+۱)q+r+۴\end{array}\right\}\Rightarrow bq+r+۱۰۰=bq+q+r+۴\Rightarrow ۱۰۰=q+۴\Rightarrow q=۹۶$$

**مثال** **چند عدد طبیعی وجود دارد که باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۹۰ مکعب خارج قسمت شود؟ کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین آن‌ها را مشخص کنید؟**

حل:

$$\left.\begin{array}{l}a\in\mathbb{N}\\ a=bq+r\end{array}\right\}\Rightarrow q=۹۰q+q^{۳} \quad , \quad \left.\begin{array}{c}۰\le q^{۳}<۹۰\\ q=۰,۱,۲,۳,۴\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$a = ۹۰q + q^۳ \rightarrow \begin{cases} q = ۰ \rightarrow a = ۰ \\ q = ۱ \rightarrow a = ۹۰(۱) + ۱ \\ q = ۲ \rightarrow a = ۹۰(۲) + ۲^۳ \\ q = ۳ \rightarrow a = ۹۰(۳) + ۳^۳ \\ q = ۴ \rightarrow a = ۹۰(۴) + ۴^۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = ۹۱ \\ a = ۴۲۴ \end{matrix}$$

$a = ۹۱$ → کوچک‌ترین
$a = ۴۲۴$ → بزرگ‌ترین
→ ۴ نوع عدد وجود داره

**بزرگ‌ترین عدد صحیح مثبت که اگر بر ۱۱۶ تقسیم شود، باقی‌مانده ۴ برابر مکعب خارج قسمت شود کدام است؟**

۱) ۵۶۴ ۲) ۴۵۶ ۳) ۲۶۴ ۴) ۴۲۶

**پاسخ:** گزینه‌ی (۲)

$$\left.\begin{matrix} a = bq + r \\ b = ۱۱۶ \\ r = ۴q^۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = ۱۱۶q + ۴q^۳$$

تو رابطی فوق زمانی a ماکزیمم میشه که خارج قسمت ماکزیمم بشه پس:

$$r \le b - ۱ \Rightarrow ۴q^۳ \le ۱۱۵ \Rightarrow q^۳ \le ۲۸ \Rightarrow q \le ۳ \Rightarrow \max(q) = ۳ \Rightarrow \max(a) = ۱۱۶ \times ۳ + ۴ \times ۳^۲ = ۴۵۶$$

**در یک تقسیم، مقسوم ۱۸برابر باقی‌مانده است. اگر باقی‌مانده بیش‌ترین مقدار خود را بیابد آن‌گاه مقسوم و مقسوم علیه به ترتیب برابرند با:**

۱) ۲۸۸و ۱۶ ۲) ۱۱۸ و ۱۶ ۳) ۲۸۸و ۱۷ ۴) ۲۰۸و ۱۶

**پاسخ:** گزینه‌ی(۳)

$$\left.\begin{matrix} a = ۱۸r \\ r = b - ۱ \\ a = bq + r \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = ۱۸(b-۱) = ۱۸b - ۱۸ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۸b - ۱۸ \\ a = bq + b - ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱۸b - ۱۸ = bq + b - ۱ \Rightarrow ۱۷b - bq = ۱۷ \Rightarrow b(۱۷ - q) = ۱۷ \times ۱ \Rightarrow \begin{cases} b = ۱۷ \rightarrow a = ۱۸ \times ۱۷ - ۱۸ = ۲۸۸ \\ ۱۷ - q = ۱ \Rightarrow q = ۱۶ \end{cases}$$

**در یک تقسیم باقی‌مانده ۱۷ و خارج قسمت ۵ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم علیه اضافه کرد تا با ثابت بودن مقسوم، خارج قسمت تغییری نکند؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ:** گزینه‌ی(۳)

$$\left.\begin{matrix} a = bq + r \Rightarrow a = ۵b + ۱۷ \\ a = ۵(b + k) + r \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۵b + ۱۷ = ۵b + ۵k + r \Rightarrow r = ۱۷ - ۵k \ge ۰ \Rightarrow ۵k \le ۱۷ \Rightarrow k \le ۳$$

**اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۴ و ۵ به ترتیب ۱ و ۳ باشد. باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۲۰ چند است؟**

۱) ۷ ۲) ۱۳ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ:** گزینه‌ی(۲)

$$a = bq + r$$

$$\begin{cases} a = ۴q + ۱ \xrightarrow{\times ۵} \\ a = ۵k + ۳ \xrightarrow{\times ۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵a = ۲۰q + ۵ \\ ۴a = ۲۰k + ۱۲ \end{cases}$$

$$a = ۲۰\underbrace{(q - k)}_{t} - ۷ \Rightarrow a = ۲۰t - ۷$$

**نکته تو درس:** *یادت باشه باقی‌مونده نمی‌تونه منفی بشه پس اگه باقی‌مونده منفی شد: از خارج قسمت یک واحد کم کن و یه مضربی از مقسوم علیه رو به باقی‌مونده اضافه کن تا مثبت بشه. یعنی:*
$a=20(t-1)-7+20 \Rightarrow a=20M+13$

**باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد طبیعی $a$ بر ۲۱ برابر ۱۲ است. اگر $a+9$ مضرب ۱۹ باشد $a$ کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟**

۱) ۳۹۰ ۲) ۳۹۳ ۳) ۳۹۶ ۴) ۳۹۹

**پاسخ:** گزینه‌ی (۱)

$$a=bq+r \Rightarrow a=21q+12 \xrightarrow{+9} a+9=21q+12+9 \Rightarrow a+9=21(q+1) \Rightarrow a+9=21q''$$

$$21q''=19q' \Rightarrow \frac{q''}{q'}=\frac{19}{21} \rightarrow \text{چون ب.م.م ۲۱ , ۱۹ برابر یکه} \Rightarrow \begin{cases} q''=19 \\ q'=21 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a+9=19\times 21 \Rightarrow a+9=399 \Rightarrow a=390$$

**نکته تو درس:** *هروقت $0<a<b$ باقی‌مونده‌ی تقسیم $a$ بر $b$ برابر $a$ می‌شه.*

**نکته تو درس:** *کوچک‌ترین عضو مجموعه $A=\{x \mid x=a-bq \geq 0 , q\in \mathbb{Z}\}$ برابره با باقی‌مانده‌ی حاصل از تقسیم عدد $a$ بر $b$*

**عضو ابتدای مجموعه‌ی $A=\{x \mid x=115-6q \geq 0 , q\in \mathbb{Z}\}$ چیست؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ:** گزینه‌ی (۱) با توجه به نکته تو درس قبلی عضو ابتدای مجموعه‌ی $A$ همون باقی‌مونده تقسیم عدد ۱۱۵ بر ۶ است:

$$115=6\times 19+1 \Rightarrow r=1$$

**نکته تو درس:** *حواست به من، تو تقسیم عدد صحیح و مثبت $a$ بر $b$ $(q\neq 0)$ مقسوم از ۲ برابر باقی‌مونده بزرگ‌تره.*

$$a=bq+r:\ 0\leq r<b \Rightarrow bq>r \Rightarrow bq+r>r+r=2r \Rightarrow a>2r$$

**نکته تو درس:** *می‌دونیم $a=bq+r$، که از بسط دو جمله‌ای نیوتن می‌تونیم نتیجه بگیریم:* $a^n=bq'+r^n$

**اثبات:**

$$a=bq+r$$

$$a^n=(bq+r)^n=\binom{n}{0}(bq)^n+\binom{n}{1}(bq)^{n-1}\times r+\dots+\binom{n}{n-1}(bq)\times r+\binom{n}{n}r^n \Rightarrow a^n=bq'+r^n$$

**مثال** اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $a$ بر ۱۹ برابر ۱۸ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^5$ بر ۱۹ را بیابید.

حل:

$$a=bq+r \Rightarrow a=19q+18 \xrightarrow{\text{نکته تو درس قبلی}} a^5=19q'+18^5$$

برای بدست آوردن باقی‌مونده $18^5$ بر ۱۹ باید از همنهشتی استفاده کنیم که تو بحثهای بعدی بهتون یاد میدم اما فعلاً میتونیم از روش زیر بریم:

$$a=bq+18 \Rightarrow a=19q'+18-19 \Rightarrow a=19q'-1 \Rightarrow a^5=19q'+(-1)^5 \Rightarrow a^5=19q'-1$$

$$\xrightarrow{\text{۱۹ واحد بهش اضافه کن تا مثبت بشه}} a^5=19q''+19-1 \Rightarrow a^5=19q''+18$$

**هر یک از اعداد زیر ۵۷۴و ۳۶۱ و ۸۵۸ در تقسیم بر عدد طبیعی $b$ دارای باقی‌مانده‌ی $r$ هستند. مقدار $b+r$ کدام است؟**

۱) ۷۶ ۲) ۷۷ ۳) ۸۶ ۴) ۸۷

**پاسخ:** گزینه‌ی(۲)

$$a=bq+r \Rightarrow \begin{array}{l} 574=bq+r \\ 361=bq'+r \\ 858=bq''+r \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 213=bk \\ \\ \xrightarrow{\text{تفاضل}} 497=bk' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} b \mid 3\times 71 \\ b \mid 7\times 71 \end{array} \Rightarrow b=71 , r=6 \Rightarrow b+r=77$$

## نمایش اعداد در مبناهای مختلف

اگه b یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک باشه، هر عدد طبیعی n رو می‌تونیم به طریقی یکتا به صورت:

$$n=\overline{(a_k a_{k-1}\dots a_1 a_\circ)}_b = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1}+\dots + a_1 b^1 + a_\circ b^\circ$$

نمایش داد که تو اون k یه عدد حسابیه و برای هر:

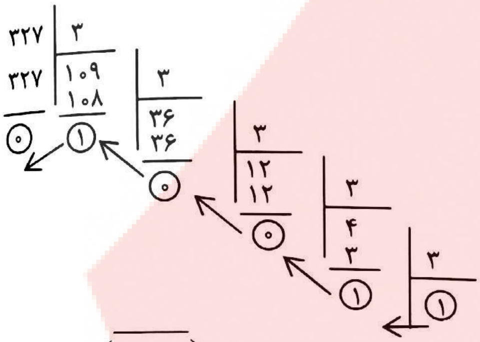
$$a_k \neq \circ \;,\; \circ \le a_i \le b-۱ \;,\; i=\circ,۱,۲,\dots,k$$

**یادآوری!**

برای تبدیل عددی از مبنای ۱۰ به مبنای غیر ۱۰ از تقسیم‌های متوالی و برای تبدیل عددی از مبنای غیر ۱۰ به مبنای ۱۰ از ضرب‌های متوالی استفاده می‌کنیم.

**مثال** عدد ۳۲۷ را در مبنای ۳ بنویسید.

حل:



$$۳۲۷ = ۳\times۱\circ۹+\circ$$
$$۱\circ۹ = ۳\times۳۶+۱$$
$$۳۶ = ۳\times۱۲+\circ$$
$$۱۲ = ۳\times۴+\circ$$
$$۴ = ۳\times۱+۱$$

$$۳۲۷ = \overline{(۱۱\circ\circ۱\circ)}_۳$$

**مثال** عدد $\overline{(۳\circ۲۱)}_۶$ چه عددی در مبنای ۱۰ می‌باشد؟

حل:

$$\overline{(۳\circ۲۱)}_۶ = ۱\times۶^\circ + ۲\times۶^۱ + \circ\times۶^۲ + ۳\times۶^۳ = ۱+۱۲+\circ+۶۴۸ = ۶۶۱$$

**مثال** عدد $\overline{(۱۱\circ۱\circ۱)}_۲$ چه عددی در مبنای ۱۶ است؟

حل:

$$\overline{(۱۱\circ۱\circ۱)}_۲ = ۱\times۲^\circ + \circ\times۲^۱ + ۱\times۲^۲ + \circ\times۲^۳ + ۱\times۲^۴ + ۱\times۲^۵ = ۵۳ = \overline{(۳۵)}_{۱۶}$$

یادت باشه برای انتقال از مبنای a غیر ۱۰ به مبنای b غیر ۱۰، اول عددو از مبنای a به مبنای ۱۰ و بعد از مبنای ۱۰ به مبنای b می‌بریم!

$$\begin{array}{r|l} ۵۳ & ۱۶ \\ \hline ۴۸ & ۳ \\ ۵ & \end{array}$$

***نکته تو درس:*** *برای تبدیل عددی از مبنای b به مبنای $b^n$ کافیه عدد و از سمت راست n رقم n رقم جدا کرده و هر n رقم رو به مبنای b برده و اعداد حاصلو کنار هم و در جای خودشون بذاریم و برای تبدیل از مبنای $b^n$ به b بالعکس عمل می‌کنیم.*

**مثال** عدد $\overline{(۱۱۱۱۱\circ۱)}_۲$ با چه عددی در مبنای ۸ برابر است؟

حل:

$$\overline{(۱۱۱۱۱\circ۱)}_۲ = (\quad ? \quad)_{۲^۳} \Rightarrow \begin{cases} \overline{(۱\circ۱)}_۲ = ۱+\circ\times۲+۱\times۴ = ۵ \\ \overline{(۱۱۱)}_۲ = ۱+۱\times۲+۱\times۴ = ۷ \\ \overline{(۱)}_۲ = ۱ \end{cases} \Rightarrow \overline{(۱۱۱۱۱\circ۱)}_۲ = \overline{(۱۷۵)}_۸$$

**مثال** عدد $(\overline{۳۴۵۶})_۸$ را به مبنای ۲ ببرید؟

حل:

$$(\overline{۳۴۵۶})_۸ = (\quad ? \quad)_۲ \Rightarrow \begin{cases} (\overline{۳})_۸ = (\overline{۰۱۱})_۲ \\ (\overline{۴})_۸ = (\overline{۱۰۰})_۲ \\ (\overline{۵})_۸ = (\overline{۱۰۱})_۲ \\ (\overline{۶})_۸ = (\overline{۱۱۰})_۲ \end{cases} \Rightarrow (\overline{۳۴۵۶})_۸ = (\overline{۰۱۱۱۰۰۱۰۱۱۱۰})_۲$$

**توجه!** اگه مبنای b از ۱۰ بزرگ‌تر باشه $a_i$ها مقادیر دو رقمی نیز می‌گیرن که به ترتیب و به اختصار از علامات زیر استفاده می‌کنیم.

$a = ۱۰ \,,\; b = ۱۱ \,,\; c = ۱۲ \,,\; d = ۱۳ \,,\; e = ۱۴ \,,\; f = ۱۵ \,,\ldots$

**مثال** عدد $(\overline{a۰bf})_{۱۶}$ چه عددی در مبنای ۱۰ است؟

حل:

$$(\overline{a۰bf})_{۱۶} = f\times ۱۶^۰ + b\times ۱۶^۱ + ۰\times ۱۶^۲ + ۰\times ۱۶^۲ + a\times ۱۶^۳ = ۱۵\times ۱ + ۱۱\times ۱۶ + ۰ + ۱۰\times ۴۰۹۶ = ۴۱۱۵۱۱$$

**نکته تو درس:** *مبنا همواره یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باید باشه.*

**نکته تو درس:** *در مبنای $b$ تنها ارقام $(b-۱)$ ,... , ۲ , ۱ , ۰ میتونن بیان.*

هرگاه $(\overline{۱۴۵})_x = (\overline{۴۱})_x + (\overline{۳۴})_x$ آن‌گاه x چند مقدار متفاوت وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ:** گزینه‌ی (۱).

$$(\overline{۴۱})_x + (\overline{۳۴})_x = (\overline{۱۴۵})_x$$

$$۱ + ۴x + ۴ + ۳x = ۵ + ۴x + x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۳x \Rightarrow x^۲ - ۳x = ۰ \Rightarrow x(x-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{غ ق ق} \leftarrow \text{مبنا نمی‌تونه صفر بشه} \\ x = ۳ & \text{غ ق ق} \leftarrow \text{تو مبنای ۳، ۴ و ۵ نمیاد} \end{cases}$$

هرگاه $(\overline{x۱y})_۳ = (\overline{y۱x})_۳$ حاصل $x - y$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

**پاسخ:** گزینه‌ی (۱).

$$(\overline{x۱y})_۳ = (\overline{y۱x})_۳$$

$$y + ۳ + ۹x = x + ۳ + ۹y \Rightarrow ۸x = ۸y \Rightarrow ۸x - ۸y = ۰ \Rightarrow ۸(x-y) = ۰ \Rightarrow x - y = ۰$$

اگر $(\overline{bbb})_۴ = (\overline{aaa})_۲$ باشد. آن‌گاه $a - b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱ یا ۳ ۴) ۴

**پاسخ:** گزینه‌ی(۱).

$$a + ۲a + ۴a = b + ۴b + ۱۶b \Rightarrow ۷a = ۲۱b \Rightarrow a = ۳b \Rightarrow \begin{cases} a = ۰ \rightarrow b = ۰ \rightarrow a - b = ۰ \\ a = ۱ \rightarrow b = \frac{۱}{۳} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

عددی در مبنای a به صورت ۴۲۱ و در مبنای b به صورت ۱۱۱ می‌باشد. نمایش این عدد، در مبنای $b - a$ کدامست؟

۱) ۴۲۱ ۲) ۱۱۱ ۳) ۱۰۰ ۴) ۳۱۰

**پاسخ:** گزینه‌ی (۱)

$$(\overline{421})_a=(\overline{111})_b \Rightarrow 1+2a+4a^2=1+b+b^2 \Rightarrow 2a+4a^2=b+b^2 \Rightarrow (b^2-4a^2)+(b-2a)=0$$
$$\Rightarrow (b-2a)(b+2a)+(b-2a)=0 \Rightarrow (b-2a)(b+2a+1)=0 \Rightarrow b-2a=0 \Rightarrow b=2a \Rightarrow (\overline{421})_{b-a}=(\overline{421})_a$$

یا
$b+2a+1=0 \Rightarrow b+2a=-1$ غ ق ق

**اگر $(\overline{xy})_3=(\overline{yx})_5$ باشد آن‌گاه $(\overline{yx})_7$ کدام است؟**

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

**پاسخ:** گزینه‌ی(۱).

$$(\overline{xy})_3=(\overline{yx})_5 \Rightarrow y+3x=x+5y \Rightarrow 2x=4y \Rightarrow x=2y \Rightarrow x=2\,,\ y=1 \Rightarrow (\overline{yx})_7=(\overline{12})_7=2+7=9$$

**اگر $(\overline{xy0})_4=(\overline{aa})_8$ آن‌گاه a کدام می‌تواند باشد؟**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۵

**پاسخ:** گزینه‌ی(۲).

$$0+4y+16x=a+8a \Rightarrow 4(y+4x)=9a \Rightarrow 4|a \Rightarrow a=4$$

## مربع کامل

عددی رو مربع کامل می‌گیم که اگه اونو به عوامل اول تجزیه کنیم توان‌های تمامی این عوامل زوج باشه.

**نکته تو درس:** *مربع هر عدد فرد همواره به صورت $8k+1$ است.*

$$a=2k+1 \Rightarrow a^2=8k+1$$

**نکته تو درس:** *هر عدد فرد اگه به توان زوج برسه همواره به صورت $8k+1$ می‌شه.*

**اگر m و n هر دو عدد فرد باشند آن‌گاه عدد صحیح $(m^6-1)n(m-n)$ همواره بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟**

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۱۰

**پاسخ:** گزینه‌ی (۲). چون m یه عدد فرده پس طبق نکته تو درس قبلی $m^6$ به شکل $8k+1$ میشه:

$$(m^6-1)n(m-n)=(8k+1-1)\,n(2k'+1-2k''-1)=8k\times n\times 2(k'-k'')=16nk(k'-k'')$$

**نکته تو درس:** *اگه A مربع کامل باشه اونوقت این عدد همواره به یکی از سه فرم زیره.*

$$A \text{ مربع کامل} \Rightarrow \begin{cases} A=5k-1 \\ A=5k \\ A=5k+1 \end{cases}$$

**نکته تو درس:** *اگه A مربع کامل باشه، رقم یکان اون یکی از ارقام ۰ و ۱ و ۴ و ۵ و ۶ و ۹ می‌شه.*

**نکته تو درس:** *اگه رقم یکان عددی یکی از ارقام ۲ و ۳ و ۷ و ۸ باشه، عدد هیچگاه مربع کامل نمی‌شه.*

**نکته تو درس:** *اگه عددی مربع کامل باشه، اونوقت بر هر عدد اولی که بخش‌پذیر باشه باید بر مربع اون عدد نیز بخش‌پذیر باشه به عنوان نمونه: ۱۴۴ مربع کامله که بر ۳ بخش‌پذیره و بر $9=3^2$ نیز بخش‌پذیره.*

> **حواستو جمع کن:** اگه عدد فردی به صورت $8k+1$ نباشه، اونوقت مربع کامل نیس.

کدام یک از اعداد زیر مربع کامل است؟

۱) ۱۵۹۲۶۷۲ ۲) ۱۵۹۲۶۴۴ ۳) ۱۵۹۲۶۳۱ ۴) ۱۵۹۲۶۴۶

**پاسخ:** گزینه‌ی (۲)

گزینه‌ی ۱: مربع کامل نیس چون رقم یکانش ۲ هس.

گزینه‌ی ۳: مربع کامل نیس چون عددی فرده که به فرم $8k+1$ نیس.

گزینه‌ی ۴: مربع کامل نیس چون بر ۲ بخش‌پذیره اما بر $4=2^2$ بخش‌پذیر نیس.

**نکته تو درس:** *حاصلضرب n عدد صحیح متوالی همواره بر n! بخش‌پذیره.*

عبارت $k(k^2-1)(k^2-4)$ همواره بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۶۰

**پاسخ:** گزینه‌ی (۳) اگه دقت کنین عبارت بالا حاصل‌ضرب ۵ عدد متوالیه پس به $5!=120$ بخش‌پذیره.

$$k(k^2-1)(k^2-4)=k(k-1)(k+1)(k-2)(k+2)=\underbrace{(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)}_{\text{۵ عدد متوالی}}$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی که باید در $5^2\times 3^5\times 2^3$ ضرب کرد تا حاصل مربع کامل شود کدام است؟ (شبانه دانشگاه تهران – ۵۰)

۱) ۶ ۲) ۳۰ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ:** گزینه‌ی (۱). باید توان تمامی عوامل زوج باشه پس $3^5$ باید تو ۳ و $2^3$ باید تو ۲ ضرب بشه که در نهایت باید تو $3\times 2=6$ ضرب بشه.

فرض کنید a عددی مربع کامل باشد. اگر a را بر ۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ی آن کدام عدد <u>نمی‌تواند باشد</u>؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) هیچ‌کدام

**پاسخ:** گزینه‌ی (۳) یادت نره عددی که مربع کامله تو تقسیم به ۳ باقی‌مونده‌ی ۲ نمیاره!

### اعداد اول

هر عدد طبیعی غیر از یک که جز به یک و خودش به هیچ عدد طبیعی دیگه‌ای بخش‌پذیر نباشه **عدد اول** می‌گیم.

**نکته تو درس:** *هر عدد طبیعی به جز یک که اول نباشه، عدد مرکب می‌گیم.*

**توجه!** عدد یک نه اوله و نه مرکب.

**نکته:** *تنها عدد اول زوج، ۲ است.*

### ویژگی‌های اعداد اول:

۱) $\left.\begin{matrix} p \text{ اول} \\ a\mid p \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=\pm 1 \\ a=\pm p \end{cases}$

۲) $\left.\begin{matrix} p \text{ اول} \\ p\mid a^n \end{matrix}\right\} \Rightarrow p\mid a$

۳) $\left.\begin{matrix} q,p \text{ اول} \\ p\mid q \end{matrix}\right\} \Rightarrow p=q$

۳) $\left.\begin{matrix} p \text{ اول} \\ p\mid ab \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} p\mid a \\ \text{یا} \\ p\mid b \end{cases}$

اگر p عددی اول بوده و $p\mid 5^{200}$ در این صورت p کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۲۵ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۱

**پاسخ:** گزینه‌ی(۳)

## نکته تو درس (اساس غربال اراتستن):

***اگر $n$ یک عدد مرکب باشه، اونوقت $n$ حداقل یک مقسوم علیه اول کوچک‌تر یا مساوی با $\sqrt{n}$ داره. از این نکته معمولاً برای بررسی اول بودن یه عدد استفاده می‌شه. یعنی اگه بخوایم ببینیم عددی مثل $n$ اوله یا نه کافیه بخش‌پذیری عدد $n$ رو به اعداد کوچک‌تر یا مساوی با $\sqrt{n}$ چک کنیم، اگه به هیچ کدوم بخش‌پذیر نباشه اوله در غیر این صورت مرکبه.***

**مثال** **آیا عدد ۵۳ اول است؟**

حل: برای این منظور اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی $\sqrt{n}$ که میشه $\sqrt{۵۳} \approx ۷/۳$ رو پیدا می‌کنیم. ۲ و ۳ و ۵ و ۷ حالا بخش‌پذیری ۵۳ رو به این اعداد بررسی می‌کنیم که نتیجه می‌گیریم ۵۳ به هیچ کدوم از اعداد ۲و ۳و۵و۷ نمی‌خوره پس اوله.

**قضیه:** ثابت کنید مجموعه اعداد اول نامتناهی است.(بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.)

**اثبات:** از برهان خلف استفاده کن: فرض کن مجموعه اعداد اول متناهیه و به صورت:

$$A = \{۲,۳,۵,۷,...,p\}$$

باشه. عدد $N$ رو به صورت $N = ۲\times۳\times....\times p$ می‌سازیم و بعد یک واحد بهش اضافه می‌کنیم:

$$N+۱ \begin{cases} \xrightarrow{\text{اوله}} \text{تناقض با } A \longrightarrow \\ \xrightarrow{\text{مرکبه}} q \text{ اگه مرکب باشه عدد اولی مثل} \Rightarrow \begin{cases} q \mid N+۱ \\ q \mid N \end{cases} \rightarrow \\ \qquad \text{عضو } A \text{ بتونه عدد } N+۱ \text{ رو عاد کنه} \\ \qquad q \mid ۱ \Rightarrow q = ۱ \rightarrow \text{تناقض} \rightarrow \text{حکم ثابت میشه} \end{cases}$$

**مثال** **عدد $a = ۲\times۳\times۵\times۷+۱$ بر چند عدد از اعداد مجموعه‌ی $\{۲,۳,۵,۷,۶,۱۰,۲۱,۲۵\}$ بخش‌پذیر است؟**

حل: هیچکدوم.

$$\begin{array}{l} ۳ \mid ۲\times۳\times۵\times۷+۱ \\ ۳ \mid ۲\times۳\times۵\times۷ \\ \hline ۳ \mid ۱ \quad \times \end{array} \quad \text{تناقض} \Leftarrow \text{حاصلضرب اونارو هم عاد نمی‌کنه.}$$

**مثال** **اگر $a$ , $b$ دو عدد طبیعی بوده و $a^۲ = b^۲ + ۱۹$ باشد مقادیر $a$ و $b$ را تعیین کنید؟**

حل:

$$a^۲ - b^۲ = ۱۹ \Rightarrow (a-b)(a+b) = \underbrace{۱۹}_{\substack{\text{اوله} \\ \text{دقت کن}}} \Rightarrow \begin{cases} a-b=۱ \\ a+b=۱۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a=۱۰ \\ b=۹ \end{array}$$

**مثال** **چند عدد اول مثل $p$ وجود دارد که $۳p+۱$ مربع کامل باشد؟**

حل: یک عدد. خوب گوش کن دیگه!!

$$۳p+۱ = k^۲ \Rightarrow ۳p = k^۲-۱ \Rightarrow ۳p = (k-۱)(k+۱)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k-۱=۳ \\ k+۱=p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=۴ \\ p=۵ \end{cases} \checkmark \quad \text{یا} \quad \begin{cases} k+۱=۳ \\ k-۱=p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=۲ \\ p=۱ \end{cases} \times$$

**مثال** **ثابت کنید عدد $n^۴ + ۴$ برای $n \geq ۲$ اول نیست.**

**اثبات:**

$$n^۴+۴ = n^۴+۴+۴n^۲-۴n^۲ = (n^۲+۲)^۲ - ۴n^۲ = \underbrace{(n^۲+۲-۲n)}_{x \neq ۱}\underbrace{(n^۲+۲+۲n)}_{x \neq ۱} \Rightarrow \text{مرکب است.}$$

**نکته تو درس:** *اعداد به صورت $n!+r$ که تو اونا $2 \le r < n$ اول نیس مثلاً:* $11!+7 = 7(\underbrace{t}_{\neq 1})$ ← مرکب

**نکته تو درس:** *اگه $p$ عددی اول و بزرگ‌تر از ۳ باشه اونوقت* $24 | p^2 - 1$.

**توجه!** (حدس قوی گلد باخ):

۱) هر عدد صحیح زوج بزرگ‌تر از ۲ رو می‌تونیم به صورت مجموع دو عدد اول بنویسیم. (این حدس تا عدد $2\times 10^{15}$ اثبات شده.)

۲) هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۷ رو می‌تونیم به صورت مجموع ۳ عدد اول فرد بنویسیم.

**کدام یک از اعداد زیر می‌تواند اول باشد؟**

۱) $2^{15}-1$ ۲) $2^{16}-1$ ۳) $2^{17}-1$ ۴) $2^{19}+1$

**پاسخ:** گزینه‌ی (۳).

**یادت باشد:** ۱- اگه $2^n - 1$ اول باشه $n$ عددی اوله (عکسش درست نیس.)

۲- اگه $2^n + 1$ اول باشه $n$ توانی از ۲ (عکسش درست نیس.)

۳- اگه $p$ اول باشه و $p | a^n$ پس $p | a$.

**اگر $p$ یک عدد اول و $n$ یک عدد طبیعی بوده که مربع $n$ برابر $p+25$ باشد. آن‌گاه حاصل $n+p$ کدام است؟**

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

**پاسخ:** گزینه‌ی(۲)

$$n^2 = p + 25 \Rightarrow n^2 - 25 = p \Rightarrow p = (n-5)(n+5)$$

$$\Rightarrow (n-5)(n+5) = 1 \times p \Rightarrow \begin{cases} n-5 = 1 \Rightarrow n = 6 \\ n+5 = p \Rightarrow p = 11 \end{cases} \Rightarrow n+p = 17$$

**چند عدد اول دو رقمی مانند $p$ یافت می‌شود که $21 | (p^2+p) = ?$**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ:** گزینه‌ی (۳)

$$21 | p^2 + p \Rightarrow 3\times 7 | p(p+1) \Rightarrow \begin{cases} 3 | p(p+1) \Rightarrow p = 3 \quad \text{یا} \quad 3 | p+1 \\ 7 | p(p+1) \Rightarrow p = 7 \quad \text{یا} \quad 7 | p+1 \end{cases}$$

دقت کن $p$ نمی‌تونه ۳ یا ۷ باشه چون به ازای این اعداد $21 \nmid p^2 + p$ پس:

$$\begin{cases} 3 | p+1 \\ 7 | p+1 \end{cases} \Rightarrow 21 | p+1 \Rightarrow p+1 = 21k \Rightarrow p = 21k - 1$$

با قرار دادن $k=2$ و $k=4$ فقط اعداد اول دو رقمی به دست میاد پس ۲ تا جواب داره.

**اگر به حاصل‌ضرب تمام اعداد اول کوچک‌تر از ۱۰۰ یک واحد افزوده شود تعداد مقسوم علیه‌های غیر از ۱ و کم‌تر از ۱۰۰ عدد حاصل کدام است؟** **(سراسری ۷۹)**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

**پاسخ:** گزینه‌ی (۱). دقت کن اگه به حاصل‌ضرب اعداد اول کوچک‌تر از $n$ یک واحد اضافه کنیم عدد حاصل یا اوله یا این‌که دارای یه شمارنده اوله که از $n$ بزرگ‌تره یعنی هیچ شمارنده‌ای غیر از ۱ نداره.

**در تقسیمی، مقسوم، مقسوم علیه، خارج قسمت و باقی‌مانده همگی اعدادی اول هستند و خارج قسمت از باقی‌مانده کوچک‌تر است. چند مقدار مختلف برای خارج قسمت می‌تواند وجود داشته باشد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش‌تر از ۲

**پاسخ:** گزینه‌ی (۲). می‌دونیم تو یه تقسیم $a = bq + r$ و چون همگی اولند پس a یک عدد اول و بزرگ‌تر از ۲ ست که در نتیجه فرده و باز میشه از این نتیجه فهمید که از bq و r یکی زوج و یکی فرده. از طرفی تو متن سؤال اومده $q < r$ یعنی r و b نمی‌تونن زوج باشن (تنها عدد اول زوج = ۲ که از همه اعداد اول کوچک‌تره) پس r و b هر دو فردن و q زوجه یعنی $q = ۲$ ← خارج قسمت یه مقدار می‌تونه داشته باشد.

### بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (ب. م.م)

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک چند عدد صحیح (که حداقل یکی از اونا مخالف صفره) بزرگ‌ترین عدد طبیعیه که اون چند عدد برش بخش‌پذیرن مثلاً اگر دو عدد ۱۲ و ۲۸ رو در نظر بگیریم:

مقسوم علیه‌های طبیعی ۱۲ $D(۱۲) = \{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$

مقسوم علیه‌های طبیعی ۲۸ $D(۲۸) = \{۱,۲,۴,۷,۱۴,۲۸\}$

که از بین مقسوم علیه‌های این دو عدد به ۱و۲و۴ مقسوم علیه‌های مشترک میگن که بزرگ‌ترینشون ۴ به عنوان ب.م.م این دو عدد معرفی میشه یعنی: $(۱۲, ۲۸) = ۴$.

### ب.م.م به بیانی دیگه

ب.م.م دو عدد a و b برابر d می‌شه اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشه:

$$۱)\ d \mid a\ ,\ d \mid b$$
$$۲)\ x \mid a\ ,\ x \mid b \Rightarrow x \le d\quad (x \mid d)$$

**حواست به من!** بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b رو با (a و b) نشون میدن.

### شرط وجود (ب.م.م)

(ب.م.م) چند عدد صحیح زمانی وجود داره که حداقل یکی از اونها مخالف صفر باشه.

**به ازای چه مقادیری از m (ب.م.م) دو عدد $m - ۱$ و $m^{۲} - ۱$ وجود دارد؟**

۱) $m = ۱$ ۲) $m = \pm ۱$ ۳) $m \neq ۱$ ۴) $m \neq \pm ۱$

**پاسخ:** گزینه‌ی(۳)

$$\begin{cases} m - ۱ = ۰ \to m = ۱ \\ m^{۲} - ۱ = ۰ \to m = \pm ۱ \end{cases}$$

چون اگه $m = ۱$ باشه هر دو عدد صفر میشن و (ب.م.م) وجود نداره. پس m باید مخالف ۱ باشه.

### روش محاسبه‌ی (ب.م.م):

**۱- روش الگوریتم اقلیدس (روش نردبانی):**

با یک مثال این روشو توضیح می‌دیم:

$$(۶۰\ , ۴۲) = ?$$
$$۶۰ = ۴۲ \times ۱ + ۱۸ \Rightarrow (۶۰, ۴۲) = (۴۲, ۱۸)$$
$$۴۲ = ۲ \times ۱۸ + ۶ \Rightarrow (۴۲\ , ۱۸) = (۱۸, ۶)$$
$$۱۸ = ۳ \times ۶ + ۰ \Rightarrow (۱۸\ , ۶) = (۶, ۰) = ۶$$

$\Rightarrow$

| | ۱ | ۲ | ۳ | |
|---|---|---|---|---|
| ۶۰ | ۴۲ | ۱۸ | ۶ | ۰ |
| ۴۲ | ۳۶ | ۱۸ | | |

ب. م. م

**۲- روش تجزیه به عوامل اول:**

برای محاسبه‌ی (ب.م.م) چند عدد صحیح اول، اون اعداد رو به عوامل تجزیه می‌کنیم بعد (ب.م.م) میشه **حاصل‌ضرب عوامل مشترک با توان کم‌تر.**

**مثال** (ب.م.م) دو عدد ۶۰ و ۴۲ را محاسبه کنید؟

حل:

$$\left.\begin{array}{l}۶۰=\underline{\underline{۲}}^{۲}\times\underline{۳}\times۵\\ ۴۰=\underline{\underline{۲}}\times\underline{۳}\times۷\end{array}\right.\Rightarrow(۶۰+۴۲)=۲\times۳=۶$$

**تعریف:** اگه (ب. م. م) دو یا چند عدد برابر یک باشه، اون اعداد رو نسبت به هم اول (متباین) می‌گیم مثل دو عدد ۱۵ و ۱۷ که متباینن یعنی ب.م.م یک دارن.

## ویژگی‌های (ب.م م)

۱) $(a\neq ۰),(a\ ,\ a)=|a|$

۲) $(\pm ۱,a)=۱$

۳) $(a\neq ۰)\ ,\ (۰,\ a)=|a|$

۴) $(a\ ,\ b)=(-a,b)=(a,-b)=(-a\ ,\ -b)$

۵) $(a\ ,\ b,c)=(a\ ,(b\ ,c))=((a,b)\ ,\ c)$

*۶) $(a\ ,b)=(a,b+na)$

۷) $a\mid b\Leftrightarrow(a\ ,\ b)=|a|$

۸) $(a\ ,\ b)=d\Leftrightarrow(a^{m}\ ,b^{m})=d^{m}$

۹) $(ka\ ,\ kb,\ kc)=|k|\,(a\ ,b\ ,\ c)$

۱۰) $\left.\begin{array}{l}(a\ ,\ b)=d\\ k\mid d\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right)=\frac{d}{|k|}$

*۱۱) $\left.\begin{array}{l}(a\ ,\ b)=d\\ d\mid d\end{array}\right\}\Rightarrow(a'\ ,\ b')=۱\ ,\ \begin{cases}a=a'd\\ b=b'd\\ (a',b')=۱\end{cases}$

۱۲) $\left.\begin{array}{l}(a\ ,\ b)=۱\\ (a\ ,c)=۱\end{array}\right\}\Rightarrow(a\ ,\ bc)=۱$

۱۳) $\left.\begin{array}{l}a\mid b\\ c\mid b\\ (a\ ,\ c)=۱\end{array}\right\}\Rightarrow ac\mid b$

۱۴) $(a,b)=۱\Leftrightarrow(a^{n}\ ,b^{m})=۱$

۱۵) $(a\ ,\ b)=۱\Rightarrow\begin{cases}(ab\ ,\ a+b)=۱\\ (ab\ ,\ a-b)=۱\end{cases}$

*۱۶) $\left.\begin{array}{l}a\mid bc\\ (a\ ,b)=۱\end{array}\right\}\Rightarrow a\mid c$

۱۷) $\left.\begin{array}{l}m\mid a\\ m\mid b\end{array}\right\}\Rightarrow m\mid(a\ ,b)$

۱۸) $\left.\begin{array}{l}c\mid a\\ d\mid b\\ (a\ ,b)=۱\end{array}\right\}\Rightarrow(c\ ,\ d)=۱$

**مثال** اگر $(a^{۲}\ ,\ b^{۲})=(a\ ,\ b)+۲۰$ حاصل عبارات $(۵a\ ,-۵b)\ ,(a^{۳}\ ,b^{۳})\ ,(a,۱۹a+b)$ را بیابید؟

حل:

$$(a\ ,\ b)=d\rightarrow\begin{cases}(a^{۲}\ ,b^{۲})=(a,\ b)+۲۰\\ d^{۲}=d+۲۰\Rightarrow d=۵\end{cases}$$

۱) $(۵a\ ,-۵b)=۵d=۲۵$

۲) $(a^{۳}\ ,b^{۳})=d^{۳}=۵^{۳}=۱۲۵$

۳) $(a\ ,۱۹a+b)=(a\ ,b)=d=۵$

**مثال** اگر $c\mid a+b$ و $(a\ ,\ b)=۱$ ثابت کنید $(a\ ,\ c)=۱$ و $(b,\ c)=۱$.

حل:

$$\begin{cases}c\mid a+b\Rightarrow a+b=ct\Rightarrow b=\\ (a,\ b)=۱\Rightarrow ra+sbct-a=۱\Rightarrow ra+sct-sa=۱\end{cases}\Rightarrow(r-s)a+stc=۱\Rightarrow(a\ ,c)=۱\ \text{فرض}$$

$$\text{فرض}\begin{cases}c\mid a+b\Rightarrow a+b=ct\Rightarrow a=ct-b\\ (a,\ b)=۱\Rightarrow ra+sb=۱\Rightarrow rct-rb+sb=۱\end{cases}\Rightarrow(s-r)b+rtc=۱\Rightarrow(b\ ,c)=۱$$

**مثال** حاصل عبارت $(2a-1, a^2-5a+9)$ را بیابید؟

حل: فرض کن $d=(2a-1, a^2-5a+9)$ باشه پس:

$$\left.\begin{array}{l} d \mid 2a-1 \\ d \mid a^2-5a+9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} d \mid (2a-1)(-a) \\ d \mid (a^2-5a+9)(2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} d \mid (-9a+18) \\ d \mid (2a-1) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} d \mid (-9a+18)(2) \\ d \mid (2a-1)(9) \end{cases}$$

$$d \mid 27 \Rightarrow d = 1, 3, 9, 27$$

**اگر $n$ یک عدد طبیعی باشد آن‌گاه ب.م.م دو عدد $3n+2$ و $3n+5$ کدام است؟**

۱) فقط ۳ ۲) فقط ۱ ۳) ۱ یا ۳ ۴) ۲ یا ۳

**پاسخ:** گزینه‌ی (۲)

$$(3n+2, 3n+5) = (3n+2, 3n+5-3n-2) = (3n+2, 3) = (3n+2-3n, 3) = (2, 3) = 1$$

**اگر $d=(4a^2-5a-4, a-2)$ باشد، $d$ کدام گزینه است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱ یا ۲ ۴) $a^2+2a$

**پاسخ:** گزینه‌ی (۳)

$$\left.\begin{array}{l} d \mid a-2 \\ d \mid 4a^2-5a-4 \end{array} \rightarrow d \mid 4a^2-16\right\} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 4a^2-5a-4-4a^2+16 \\ d \mid -5a+12 \\ d \mid a-2 \Rightarrow d \mid 5a-10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d \mid -\cancel{5a}+12+\cancel{5a}-10 \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow d = 2 \text{ یا } 1$$

**حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی برابر با ۱۳۶ و بزرگ‌ترین شمارنده مشترک آن‌ها برابر ۲ است این دو عدد کدامند؟**

۱) ۱۷ و ۸ ۲) ۱۸ و ۴ ۳) ۴ و ۲۴ ۴) ۴ و ۳۴

**پاسخ:** گزینه‌ی (۴)

$$\left.\begin{array}{l} ab=136 \\ (a,b)=2=d \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=a'd \rightarrow a=2a' \\ b=b'd \rightarrow b=2b' \end{cases} \Rightarrow ab=136 \Rightarrow 4a'b'=136$$

$$\begin{cases} a'b'=34 \\ (a',b')=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'=17 \Rightarrow a=34 \\ b'=2 \Rightarrow b=4 \end{cases}$$

**اگر $(a,b)=6$ و $a^2-b^2=576$ و $a, b \in \mathbb{N}$ آن‌گاه $a+b$ کدام است؟**

۱) ۴۸ ۲) ۵۴ ۳) ۳۶ ۴) ۲۷

**پاسخ:** گزینه‌ی (۱)

$$(a,b)=6 \Rightarrow d=6 \Rightarrow \begin{cases} a=a'd \\ b=b'd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6a' \\ b=6b' \end{cases}, \ (a',b')=1 \Rightarrow$$

$$36a'^2-36b'^2=576 \Rightarrow a'^2-b'^2=16 \Rightarrow \begin{cases} a'=5 \\ b'=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6\times 5=30 \\ b=6\times 3=18 \end{cases} \Rightarrow a+b=48$$

## قضیه بزو

(ب.م.م) چند عدد صحیح رو می‌تونیم به شکل ترکیب خطی از چند عدد بنویسیم به طوریکه ضرایب منحصر به فرد نباشن.

$$(a_۱,a_۲,\dots,a_n)=d \Rightarrow d=r_۱a_۱+r_۲a_۲+\dots+r_na_n$$

**یادت نره!** عکس قضیه بزو صحیح نیس.

$$(۱۰,۱۴,۶)=۲$$
$$۲=۰\times۱۰+۱\times۱۴+(-۲)\times۶$$
$$۲=۲\times۱۰+۰\times۱۴+(-۳)\times۶$$

## نتایج قضیه بزو

۱) $S=ma+nb \Leftrightarrow (a,b)|S$

۲) $۱=ma+nb \Leftrightarrow (a,b)=۱$

۳- اگه مجموعه‌ی $S$ مجموعه تمامی اعداد صحیح و مثبتی باشه که بتونیم به شکل ترکیب خطی از دو عدد $a$ و $b$ بنویسیم. و مجموعه‌ی $A$ مجموعه مضارب طبیعی (ب.م.م) دو عدد $a$ و $b$ باشه $\Leftarrow$ اونوقت این دو مجموعه همواره برابرن و عضو ابتدای اونا همون (ب.م.م) دو عدد $a$ و $b$ میشه.

$$S=\{x \mid x=ma+nb>۰\ ,\ m,n\in\mathbb{Z}\}$$
$$A=\{x \mid x=k(a,b)\ ,\ k\in\mathbb{N}\}$$
$$(۶۰,۲۴)=۱۲\to\begin{cases}S=\{x\mid x=۶۰m+۲۴n>۰\ ,m,n\in\mathbb{Z}\}=\{۱۲,۲۴,۳۶,\dots\}\\A=\{x\mid x=۱۲k\ ,k\in\mathbb{N}\}=\{۱۲,۲۴,۳۶,\dots\}\end{cases}$$

**اگر $۱۲a-۶=۱۸b$ باشد.(ب.م.م) دو عدد $a$ و $b$ کدام است؟**

۱) ۱ یا ۲ ۲) فقط ۱ ۳) فقط ۲ ۴) ۱ یا ۲ یا ۴

**پاسخ:** گزینه‌ی (۲)

$$۱۲a-۱۸b=۶\Rightarrow ۲a-۳b=۱\Rightarrow(a,b)=۱$$

**اگر $(a,b)=d$ و $۲۱a+۱۴b=۳۵$ آن‌گاه:**

۱) $d=۱۰$ ۲) $d=۲$ ۳) $d=۵$ یا ۱ ۴) $d=۳$

**پاسخ:** گزینه‌ی (۳)

$$۲۱a+۱۴b=۳۵\Rightarrow۳a+۲b=۵\Rightarrow d|۵\Rightarrow d=۱\ \text{یا}\ ۵$$

**کوچک‌ترین عدد صحیح مثبتی که می‌توان به شکل ترکیب خطی از دو عدد ۴۲ و ۷۲ نوشت چیست؟**

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۱۶ ۴) ۴۲

**پاسخ:** گزینه‌ی (۲) اگه به نتیجه ۳ قضیه بزو دقت کنی می‌بینی که کوچک‌ترین عدد صحیح مثبتی که میشه به شکل ترکیب خطی از دو عدد ۴۲ و ۷۲ نوشت همون (ب.م.م) دو عدده که اینجا میشه ۶.

**اگر بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک $n^۲-n$ و $n^۳-n$ برابر ۳۰ باشد. مقدار $n$ کدام است؟** (شاهد ۶۹)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

**پاسخ:** گزینه‌ی (۳)

$$\begin{rcases}n^۲-n=n(n-۱)\\n^۳-n=n(n-۱)(n+۱)\end{rcases}\Rightarrow(n^۳-n\ ,\ n^۲-n)=n(n-۱)=\underbrace{۳۰}_{۶\times۵}\Rightarrow n=۶$$

اگر عدد p بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و $p^{2}$ و $p^{2}$ ب.م.م b و $p^{4}$ باشد. $(p^{5}, ab) = ?$ (سراسری ریاضی ۵۳)

۱) $p^{2}$ ۲) $p^{4}$ ۳) $p$ ۴) $p^{3}$

**پاسخ:** گزینه‌ی (۴)

$$\begin{cases}(a, p^{2}) = p \\ (p^{4}, b) = p^{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p \mid a, \ p \mid p^{2} \Rightarrow a = kp \\ p^{2} \mid b \Rightarrow b = k'p^{2}\end{cases} \Rightarrow (ab, p^{5}) = (kk'p^{3}, p^{5}) = p^{3}$$

اگر $a = bq + r$ در این صورت کدام درست است؟ $(a, b, q, r \in \mathbb{Z})$

۱) $(a, b) = (b, r)$ ۲) $(b, r) = (q, r)$ ۳) $(a, r) = (b, q)$ ۴) $(a, b) = (a, q)$

**پاسخ:** گزینه‌ی (۱)

فرض کن $(a, b) = d$ , $(b, r) = d'$ پس:

$$(a, b) = d \Rightarrow \begin{cases}d \mid a \rightarrow d \mid bq + r \\ d \mid b \rightarrow d \mid b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d \mid r \\ d \mid b\end{cases} \Rightarrow d \mid (b, r) \Rightarrow d \mid d'$$

$$(b, r) = d' \Rightarrow \begin{cases}d' \mid r \rightarrow d' \mid a - bq \\ d' \mid b \rightarrow d' \mid bq\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d' \mid a \\ d' \mid b\end{cases} \Rightarrow d' \mid (b, b) \Rightarrow d' \mid d$$

چون $d \mid d'$ , $d' \mid d \Leftarrow \boxed{d = d'}$

بزرگ‌ترین شمارنده مشترک دو عدد ۷۲ بوده و عدد بزرگ‌تر ۸۶۴ می‌باشد. برای عدد کوچک‌تر در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

**پاسخ:** گزینه‌ی (۱)

**حواستو جمع کن** که هر عدد خودش مضرب (ب.م.م) هس یعنی:

$$(۸۶۴, x) = ۷۲ \Rightarrow (۷۲ \times ۱۲, ۷۲x') = ۷۲ \Rightarrow (۱۲, x') = ۱ \Rightarrow x' = \{۱, ۵, ۷, ۱۱\}$$

اگر بدانیم $(m, n) = ۱$ آن‌گاه حاصل $(۱۳m + ۸n, ۵m + ۳n)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱ یا ۲ ۳) ۵ ۴) ۳

**پاسخ:** گزینه‌ی (۱)

$$(۱۳m + ۸n, ۵m + ۳n) = d \Rightarrow \left\{\begin{matrix}d \mid ۱۳m + ۸n \xrightarrow{\times ۳} d \mid ۳۹m + ۲۴n \\ d \mid ۵m + ۳n \xrightarrow{\times ۸} d \mid ۴۰m + ۲۴n\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid m \qquad (*)$$

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}d \mid m \rightarrow & d \mid ۵m \\ \text{می دونیم} \Rightarrow & d \mid ۵m + ۳n\end{matrix}\right\} \Rightarrow d \mid ۵m + ۳n - ۵m \Rightarrow d \mid ۳n \xrightarrow{\times ۵} d \mid ۱۵n \\ \left.\begin{matrix}d \mid m \rightarrow & d \mid ۱۳m \\ \text{می دونیم} \Rightarrow & d \mid ۱۳m + ۸n\end{matrix}\right\} \Rightarrow d \mid ۱۳m + ۸n - ۱۳m \Rightarrow d \mid ۸n \xrightarrow{\times ۲} d \mid ۱۶n\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid n \qquad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow d \mid (m, n) \xrightarrow[(m, n) = ۱]{\text{فرض}} d \mid ۱ \Rightarrow d = ۱$$

## کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م)

کوچک‌ترین مضرب مشترک چند عدد صحیح (که تمامی اون‌ها مخالف صفرن) کوچک‌ترین عدد طبیعیه که به اون چند عدد بخش‌پذیر باشه

مثلاً دو عدد ۱۰ و ۱۵ رو در نظر بگیرید:

- اعداد طبیعی که بر ۱۰ بخش‌پذیرن: ۱۰,۲۰,۳۰, ۴۰ ,۵۰ ,۶۰,۷۰,.....
- اعداد طبیعی که بر ۱۵ بخش‌پذیرن: ۱۵,۳۰, ۴۵ ,۶۰,۷۵,.....

که بین این اعداد ...,۶۰ , ۳۰ مشترکن و به اونا مضارب مشترک دو عدد ۱۰ و ۱۵ میگن و به کوچک‌ترین اونا که ۳۰ باشه میگن (ک.م.م)

## تعریف (ک.م.م)به بیانی دیگر

(ک.م.م) دو عدد a و b برابر c هستن اگه و تنها اگه دو شرط زیر برقرار باشه:

۱) $a \mid c , b \mid c$

۲) $a \mid x , b \mid x \Rightarrow c \le x , (c \mid x)$

یادت باشد که (ک.م.م) دو عدد a و b رو با $[a , b]$ نشون میدیم.

**به ازای چه مقادیری از m (ک.م.م) دو عدد $m-۱$ و $m^۲-۱$ وجود دارد؟**

۱) $m=۱$ ۲) $m=\pm۱$ ۳) $m\neq۱$ ۴) $m\neq\pm۱$

**پاسخ:** گزینه‌ی (۴) می‌دونیم (ک.م.م) زمانی وجود داره که تمامی اعداد مخالف صفر باشن.

$m-۱\neq ۰ \to m\neq ۱$

$m^۲-۱\neq۰\to m\neq\pm۱$

## روش محاسبه (ک.م.م)

**۱- از راه تجزیه:** برای محاسبه‌ی (ک.م.م) چند عدد، ابتدا اون اعداد رو به عوامل اول تجزیه می‌کنیم بعد (ک.م.م) برابره با حاصل‌ضرب عوامل مشترک و غیر مشترک با توان بزرگ‌تر مثلاً:

$[۵۶ , ۱۲]=?$

$$\left.\begin{array}{l} ۵۶=۲^۳\times۷ \\ ۱۲=۲^۲\times۳ \end{array}\right. \Rightarrow [۵۶ , ۱۲]=۲^۳\times۳\times۷=۱۶۸$$

**۲- با استفاده از قضیه اساسی حساب استدلالی:** برای هر دو عدد صحیح و غیر صفر a و b داریم:

$$(a , b)\times[a , b]=|a\times b| \Rightarrow \text{ک.م.م}=\frac{\text{حاصل ضرب دو عدد}}{\text{ب.م.م}}$$

$[۵۶ , ۱۲]=?$

$$\left.\begin{array}{l} ۵۶=۲^۳\times۷ \\ ۱۲=۲^۲\times۳ \end{array}\right. \Rightarrow (۵۶ , ۱۲)=۲^۲=۴ \Rightarrow [۵۶ , ۱۲]=\frac{۵۶\times۱۲}{(۵۶ , ۱۲)}=\frac{۵۶\times۱۲}{۴}=۱۶۸$$

## ویژگی‌های ک.م.م

۱) $[a , a]=|a|$

۲) $[\pm۱ , a]=|a|$

۳) $[a , b]=[-a, b]=[a, -b]=[-a , -b]$

۴) $[a ,b ,c]=[a, [b , c]]=[[a,b] , c]$

۵) $[ka,kb ,kc]=|k|[a, b,c]$

۶) $\left.\begin{array}{l}[a , b]=c \\ k|a \ , \ k|b\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]=\frac{c}{|k|}$

۷) $a|b\Rightarrow [a , b]=|b|$

۸) $[a , b]=c \Leftrightarrow [a^m , b^m]=c^m$

$$9)\ \left.\begin{array}{l}(a,b)[a,b]=|ab|\\ a=a'd\\ b=b'd\ ,(a',b')=1\\ (a,b)=d\\ [a,b]=c\end{array}\right\}\Rightarrow dc=a'd\,.\,b'd\Rightarrow c=a'b'd$$

$10)\ (a,[a,b])=|a|$ $\qquad$ $11)\ [a,(a,b)]=|a|$

$12)\ (a[b,c])=[(a,b),(a,c)]$ $\qquad$ $13)\ [a,(b,c)]=([a,b],[a,c])$

**هرگاه $m$ عدد صحیح دلخواهی باشد حاصل $[2, 4m^2-1]$ کدام است؟**

۱) $4m^2-1$ ۲) $8m^2-1$ ۳) $4m^2-2$ ۴) $8m^2-2$

**پاسخ:** گزینه‌ی (۴)

$$[2,4m^2-1]=[2,(2m-1)(2m+1)]$$

از اونجایی که $2m-1$ و $2m+1$ هر دو فردن پس حاصل‌ضربشونم عددی فرده و از طرفی ۲ و هر عدد فردی نسبت به هم اولن (متباین) $\Leftarrow$ ک.م.م این دو عدد برابر حاصل‌ضربشونه.

**اگر $a$ و $b$ نسبت به هم اول باشند، حاصل $[(a^3,a^2b),(ab^3,a^2)]$ کدام است؟**

۱) $|a|$ ۲) $|b.a|$ ۳) $a^2$ ۴) $a^2|b|$

**پاسخ:** گزینه‌ی (۳)

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)=1\Rightarrow a^2(a,b)=a^2\Rightarrow(a^3,a^2b)=a^2\\ (a,b)=1\Rightarrow(a,b^3)=1\Rightarrow a(a,b^3)=a\Rightarrow(a^2,ab^3)=a\end{array}\right\}\Rightarrow[(a^3,a^2b),(ab^3,a^2)]=[a^2,a]=a^2$$

**اگر $a|b$ آن‌گاه حاصل $([a^2,b^2],(a^2,b^2))$ کدام است؟**

۱) $a^2b^2$ ۲) $ab$ ۳) $a^2$ ۴) $b^2$

**پاسخ:** پس گزینه‌ی (۳)

$$a|b\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}(a^2,b^2)=a^2\\ [a^2,b^2]=b^2\end{array}\right.\Rightarrow([a^2,b^2],(a^2,b^2))=(b^2,a^2)=a^2$$

**اگر مجموع دو عدد برابر ۲۸۵ و ک.م.م آن‌ها ۱۰۵۰ باشد آن‌گاه این دو عدد کدامند؟**

۱) ۲۰۰ و ۸۵ ۲) ۲۱۰ و ۷۵ ۳) ۱۹۰ و ۹۵ ۴) ۲۲۰ و ۷۵

**پاسخ:** گزینه‌ی (۲)

$$a+b=285\Rightarrow a'd+b'd=285\Rightarrow(a'+b')d=285 \qquad (1)$$

$$[a,b]=1050\Rightarrow a'b'd=1050 \qquad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)}\Rightarrow\frac{\cancel{d}(a'+b')}{a'b'\cancel{d}}=\frac{285}{1050}\Rightarrow\frac{a'+b'}{a'b'}=\frac{19}{70}$$

چون $a',b'$ نسبت به هم اولن، پس $a'b'$ و $a'+b'$ هم نسبت به هم اولن $\Leftarrow$

$$\left.\begin{array}{l}a'+b'=19\\ a'b'=70\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a'=14\\ b'=5\end{array}\right.\xrightarrow{d=15}\left\{\begin{array}{l}a=14\times15=210\\ b=5\times15=75\end{array}\right.$$

**مثال** **نسبت دو عدد طبیعی ۱/۲ و حاصل جمع، ضرب آن‌ها با ک.م.م ۳۹۶۰ می‌باشد. آن دو عدد کدامند؟**

حل:

$a\,,b\in\mathbb{N}$

$$\frac{a}{b}=۱/۲=\frac{۱۲}{۱۰}\Rightarrow\frac{a'd}{b'd}=\frac{۶}{۵}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a'}{b'}=\frac{۶}{۵}\\(a',b')=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a'=۶\\b'=۵\end{cases}\qquad(۱)$$

$$ab+[a\,,b]=۳۹۶۰$$

$$a'db'd+a'b'd=۳۹۶۰\xrightarrow{(۱)}۳۰d^۲+۳۰d=۳۹۶۰\rightarrow d^۲+d=۱۳۲$$

$$\Rightarrow d(d+۱)=۱۳۲\xrightarrow[\text{دو عدد متوالی}]{\text{حاصل ضرب}}d(d+۱)=۱۱\times۱۲\Rightarrow d=۱۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=a'd\rightarrow a=۶\times۱۱=۶۶\\b=b'd\rightarrow b=۵\times۱۱=۵۵\end{cases}$$

**مثال** **اگر $[a\,,\,b]=(a,b)+۱$ باشد حاصل $a^۲+b^۲=?$**

حل:

$$[a\,,b]=(a\,,b)+۱\Rightarrow a'b'd=d+۱\Rightarrow d(a'b'-۱)=d\Rightarrow d\,|\,۱\Rightarrow d=۱$$

$$a'b'=۲\Rightarrow\begin{cases}\rightarrow a'=۱\\\rightarrow b'=۲\end{cases}\Rightarrow a^۲+b^۲\xrightarrow{d=۱}(a')^۲+(b')^۲=۱+۴=۵$$

**مثال** **اگر $[a\,,\,b]=\frac{a+b}{۲}$ حاصل $a-b$ کدام است؟**

حل:

$$a'b'\cancel{d}=\frac{(a'+b')\cancel{d}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}۲a'b'=a'+b'\\(a'\,,b')=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a'=۱\\b'=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=a'd\\b=b'd\end{cases}\Rightarrow a-b=a'd-b'd=d-d=۰$$

**اگر $a-b=۲۰$ و $[a\,,\,b]=۱۰۵$ و $a\,,b\in\mathbb{N}$ در این صورت حاصل‌ضرب آن‌ها کدام است؟**

۱) ۱۲۵ ۲) ۳۷۵ ۳) ۵۲۵ ۴) ۱۱۲۵

**پاسخ:** گزینه‌ی (۳)

$$\left.\begin{array}{l}a-b=۲۰\Rightarrow a'd-b'd=۲۰\Rightarrow d(a'-b')=۲۰\\ [a\,,b]=۱۰۵\Rightarrow a'b'd=۱۰۵\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{(a'-b')\cancel{d}}{a'b'\cancel{d}}=\frac{۲۰}{۱۰۵}$$

$$\frac{a'-b'}{a'b'}=\frac{۴}{۲۱}\xrightarrow{(a',\,b')=۱}\begin{cases}a'=۷\\b'=۳\end{cases}\Rightarrow ۳\times۷\times d=۱۰۵\Rightarrow d=۵\ \text{از طرفی}\ a'b'd=۱۰۵$$

$$\begin{cases}a=a'd\rightarrow a=۳۵\\b=b'd\rightarrow b=۱۵\end{cases}\rightarrow a\times b=۱۵\times۳۵=۵۲۵$$

**اگر $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}$ و $ab-[a\,,b]=۳۶۰$ باشد، در این صورت $a+b$ کدام است؟**

۱) ۳۶ ۲) ۴۲ ۳) ۴۸ ۴) ۵۴

**پاسخ:** گزینه‌ی (۲)

$$\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{a'\cancel{d}}{b'\cancel{d}}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a'}{b'}=\frac{۳}{۴}\\(a',b')=۱\end{cases}\Rightarrow a'=۳\,,b'=۴$$

$$ab-[a\,,b]=۳۶۰\Rightarrow a'db'd-a'b'd=۳۶۰\Rightarrow ۱۲d^۲-۱۲d=۳۶۰$$

$$d^۲-d=۳۰\Rightarrow d(d-۱)=۶\times۵\Rightarrow d=۶\Rightarrow\begin{cases}a=a'd\rightarrow a=۱۸\\b=b'd\rightarrow b=۲۴\end{cases}\Rightarrow a+b=۴۲$$