جزوه درسی هندسه۲ (سال یازدهم رشته ریاضی)

مدرسه غیردولتی موحد

شامل کلیه تمارین و قضایای کتاب درسی

تهیه و تدوین : محمد عبدی

این جزوه شامل تمامی نکات مهم و قضایا و تمرین‌ها و مثال‌های حل‌شده کتاب درسی است و به طور کامل کتاب محور است و تمامی سوالات امتحان نهایی و شبه نهایی داخل جزوه می‌باشد.

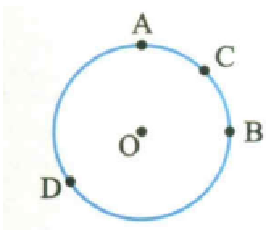
فصل ۱: دایره

مفاهیم اولیه و زاویه در دایره:

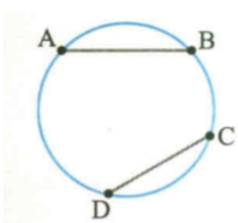
تعریف دایره: نقاطی از صفحه که فاصله‌شان از یک نقطه مقدار ثابتی باشد. که این نقطه را مرکز دایره و این مقدار ثابت را شعاع دایره می‌نامند.

هر دایره را با $C(O,R)$ نیزنمایش می‌دهند.

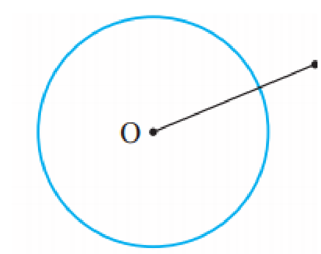
کمان در دایره: دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن روی محیط دایره نام دارد و اندازه آن بر حسب درجه می‌باشد.

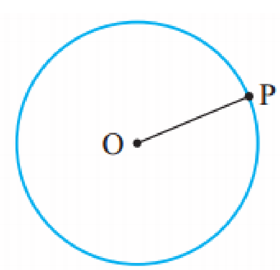


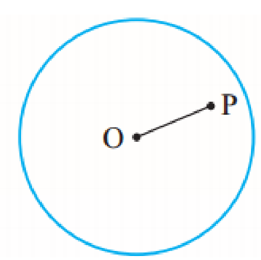
قطر و وتر دایره: پاره‌خطی که دو نقطه از دایره را به هم وصل می‌کند وتر نام دارد که بزرگ‌ترین آن قطر است.



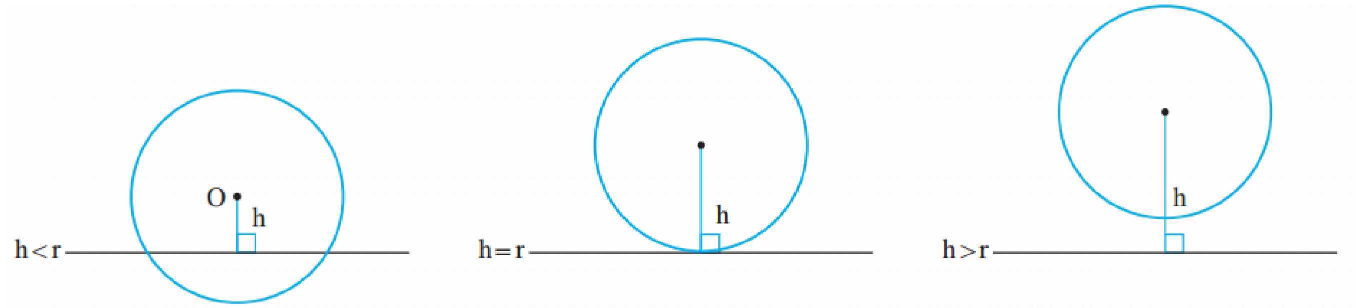
وضعیت نقطه و دایره:



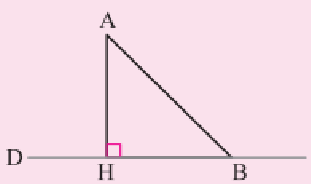




وضعیت خط و دایره:

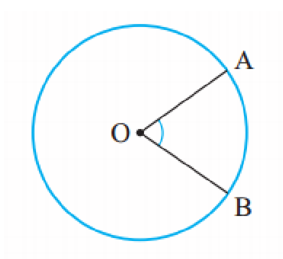


اگر از نقطهٔ A واقع در خارج خط D بر خط D عمود کنیم طول عمود از بقیهٔ پاره‌خط‌هایی که به نقاط دیگر خط D وصل می‌شوند، کوچکتر است.

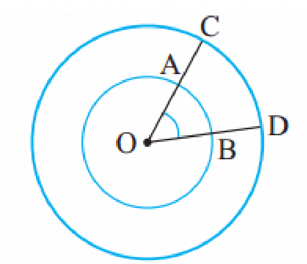


$AH < AB$

زاویه مرکزی: زاویه ای که رأس آن روی مرکز دایره و اضلاع آن شعاع هایی از دایره باشند، زاویهٔ مرکزی نامیده میشود. بر اساس قرار داد زاویهٔ مرکزی با کمان مقابلش بر حسب درجه مساوی است.



نکته تستی: اندازه زاویه مرکزی به بزرگی و کوچکی دایره بستگی ندارد.

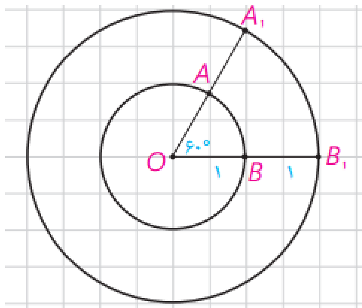


$$AB = CD$$

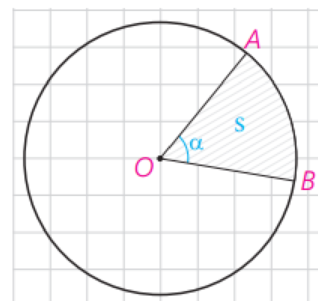
روش محاسبه طول کمان:

$$\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان AB}}{۳۶۰}$$

در شکل مقابل طول کمان‌ها را مشخص کنید.



قطاع: ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است را قطاع می‌نامند.

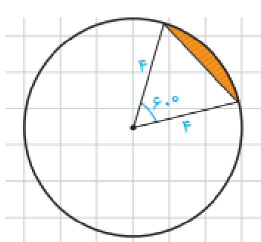


(α بر حسب درجه است)

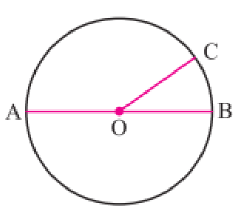
$$L = \frac{\pi R \alpha}{180}$$

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

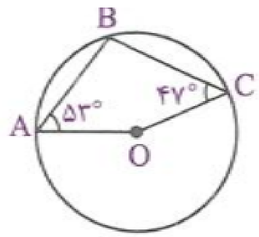
مثال۱: در دایره مقابل مساحت قسمت هاشور خورده را بیابید و همچنین طول کمان روبه رو به زاویه ٦٠ درجه را بیابید.



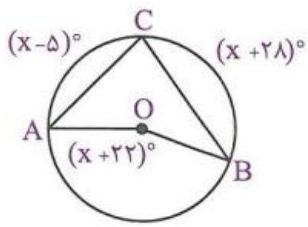
مثال۲: در شکل مقابل AB نیز قطر دایره است و کمان AC نیز ٤ برابر کمان BC است. اندازه $A\widehat{O}C$ را بیابید.



مثال۳: در شکل مقابل اندازه زاویه $\widehat{O}$ را بیابید.



مثال٤: در شکل مقابل مقدار مجهول را بیابید و اندازه کمان AB را مشخص کنید.



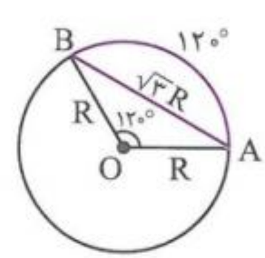
قضیه ۱: ثابت کنید اگر دو وتر از یک دایره باهم مساوی باشند کمان‌های نظیرشان مساوی است.

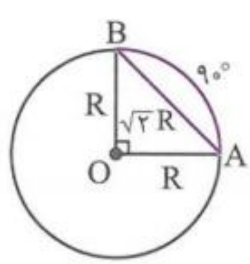
عکس قضیه ۱ را بیان کنید سپس اثبات کنید.

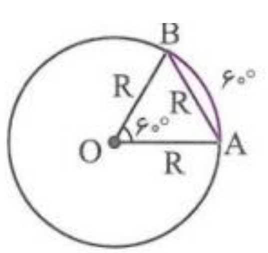
قضیه ۲: ثابت کنید اگر قطری از یک دایره بر وتری از آن عمود شود آن وتر و کمان‌های نظیرش را نصف می‌کند.

چند نکته تستی: تشخیص زاویه مرکزی با داشتن طول وتر:

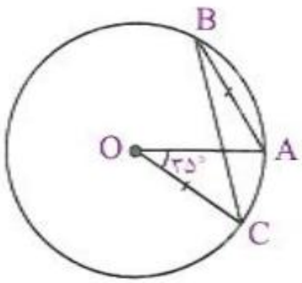
در دایره به شعاع R اگر اندازه وترهای داده شده به صورت R یا $\sqrt{2}R$ یا $\sqrt{3}R$ باشد اندازه زاویه مرکزی یا ۶۰ یا ۹۰ یا ۱۲۰ درجه است.





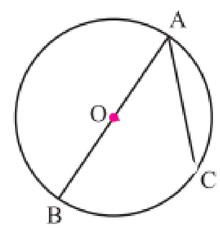


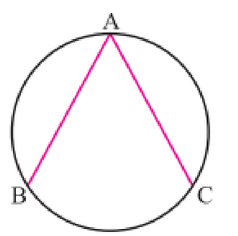
تست: در کل مقابل $AB = OC$ است در این صورت اندازه زاویه $\widehat{C}$ را بیابید.

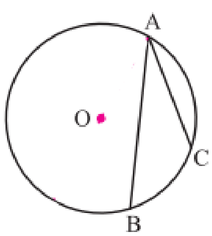


زاویه محاطی: زاویه ای که رأس آن روی دایـره و اضـلاع آن وترهـایی از دایـره باشـند زاویـهٔ محاطی نامیده میشود.

اندازه هر زاویه محاطی نصف کمان مقابلش می‌باشد.

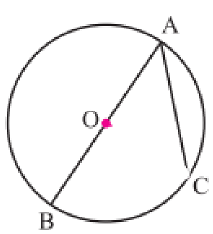




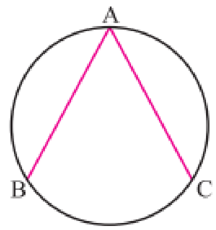


قضیه ۳: قضیه زاویه محاطی را بیان و در ۳ حالت اثبات نمایید.

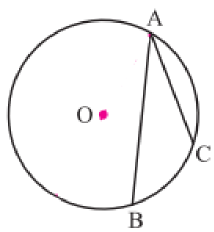
حالت ۱:



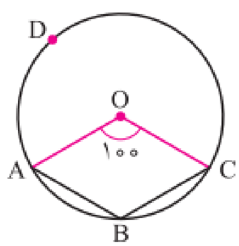
حالت ۲:



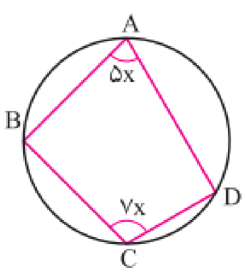
حالت ۳:



مثال۵: در شکل مقابل اندازه زاویه $\widehat{B}$ را بیابید.



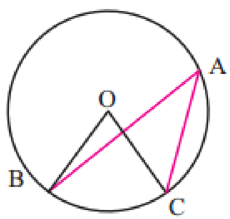
مثال۶: در شکل مقابل اندازه زاویه $\widehat{C}$ را بیابید.



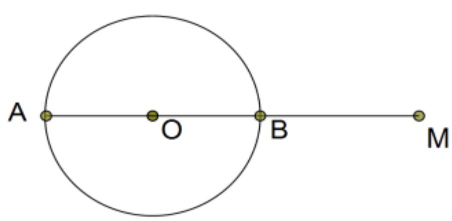
قضیه٤: ثابت کنید در هر دایره کمان‌های محصور بین دو وتر موازی باهم برابرند.

نکته: عکس قضیه ٤: اگر کمان‌های محصور بین دو وتر باهم برابر باشند آن دو وتر موازی‌اند.

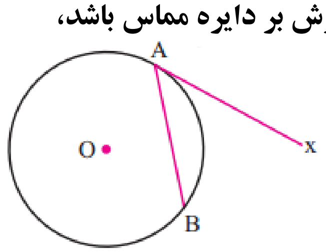
مثال۷: در شکل زیر $\hat{O}+\hat{A}=120^\circ$ اندازهٔ $\hat{O}$ چقدر است؟



بیشترین و کمترین فاصله ی یک نقطه خارج دایره از نقاط دایره: مطابق شکل اگر نقطه M خارج از دایره C باشد، آنگاه بیشترین فاصله ی M از نقاط دایره برابر MA و کمترین فاصله آن برابر MB است.

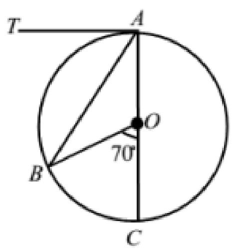


زاویه ظلی: زاویه ای که رأس آن روی دایره و یک ضلع آن وتری از دایره و ضلع دیگرش بر دایره مماس باشد، زاویهٔ ظلّی نامیده می‌شود.

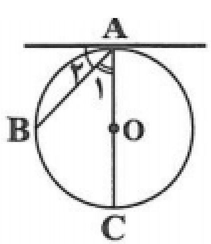


قضیه ۵: اندازه هر زاویه ظلی نصف کمان مقابلش است.

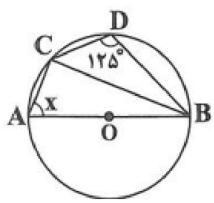
مثال۷:در شکل مقابل اندازه زاویه $T\widehat{A}B$ را بیابید.



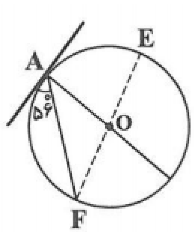
مثال۸: در شکل مقابل اگر A_2 زاویه ظلی و برابر ۵۰ درجه باشد اندازه کمان BC را بیابید.



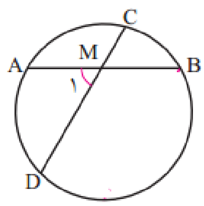
مثال۹: در شکل مقابل اندازه زاویه $\widehat{x}$ را بیابید.



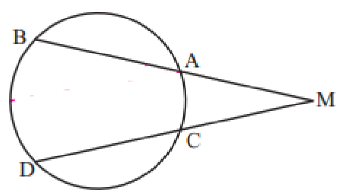
مثال۱۰: در شکل مقابل اندازه کمان AE را بیابید.



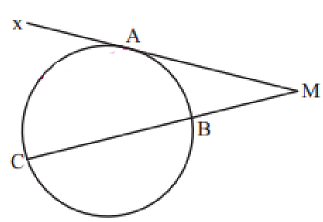
قضیه ۶: ثابت کنید زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره پدید می‌آید برابر نصف مجموع دو کمانی از دایره که به دو ضلع زاویه و امتداد اضلاع آن محدودند می‌باشد.



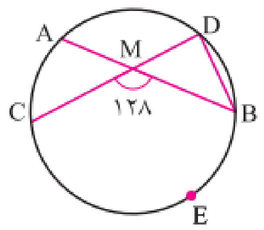
قضیه ۷: ثابت کنید زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر در خارج دایره پدید می‌آید برابر نصف تفاضل کمانهایی از دایره که به اضلاع زاویه محدودند مساوی است.



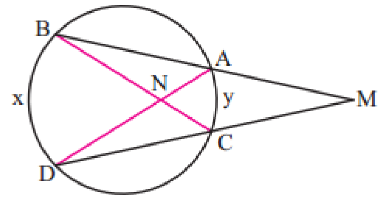
مثال۱۱: در شکل مقابل ثابت کنید $\hat{M} = \dfrac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{۲}$.



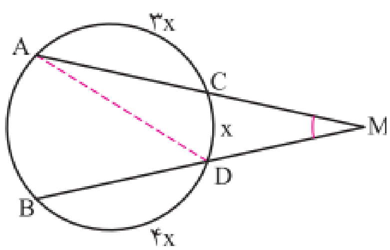
مثال۱۲: در شکل زیر $\widehat{BEC} = ۳\widehat{AD}$ ، اندازهٔ $\hat{D}$ چقدر است؟



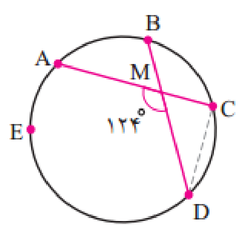
مثال۱۳: در شکل زیر $\hat{M} = ۳۵^\circ$ و $B\hat{N}D = ۸۵^\circ$ ، مقادیر x و y را حساب کنید.



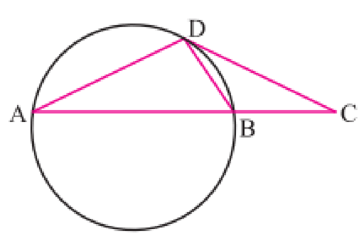
مثال۱۴: در شکل زیر $\hat{M} = ۳۶^\circ$ ، اندازهٔ $\hat{D}$ را حساب کنید.



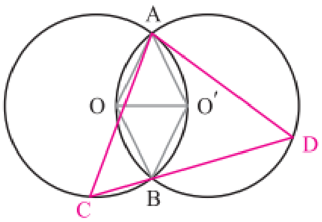
مثال۱۵: در شکل زیر $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$ اندازهٔ $\hat{C}$ را حساب کنید.



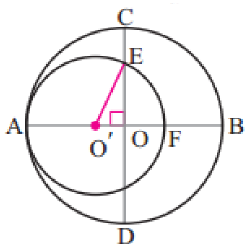
مثال۱۶: در شکل زیر CD بر دایره مماس است و $DA = DC$ ، ثابت کنید $BD = BC$



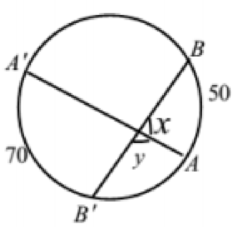
مثال۱۷: دو دایره به مراکز O و O' طوری رسم شده‌اند که مرکز هر کدام روی محیط دیگری قرار دارد و نقاط تقاطع دو دایره A و B می‌باشند. خط دلخواهی از B رسم می‌کنیم تا دایره‌ها را در C و D قطع کنند. ثابت کنید مثلث ADC متساوی‌الاضلاع است.

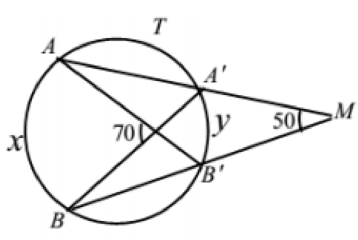


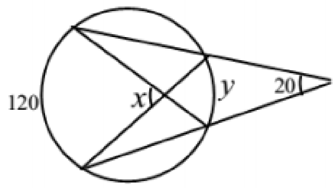
مثال۱۸: در شکل زیر دو دایره مماس داخلی‌اند، اگر $CE = ۶$ و $BF = ۱۰$ باشد، شعاع دو دایره را حساب کنید.



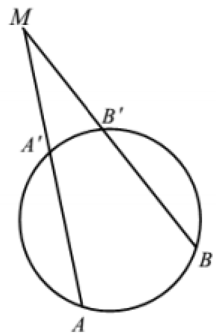
مثال۱۹: مقادیر x و y را بیابید.







مثال۲۰: در هر یک از حالات زیر مقادیر M را بیابید.



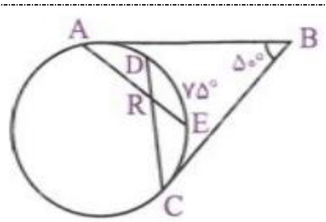
الف) $\overset{\frown}{A'B'}=80^\circ,\ \overset{\frown}{AB}=120^\circ$

ب) $\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}=30^\circ$

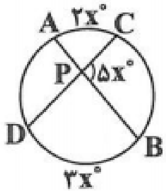
ج) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}+60^\circ$

د) $\overset{\frown}{A'B'}=\dfrac{\overset{\frown}{BB'}}{4}=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{3}=\dfrac{\overset{\frown}{AA'}}{2}$

مثال۲۱: در شکل مقابل اندازه زاویه $A\widehat{R}C$ را بیابید.



چند تست کاربردی:



در شکل مقابل $\overset{\frown}{AC} = ۲x°$ و $\overset{\frown}{BD} = ۳x°$ و $C\hat{P}B = ۵x°$، مقدار x چند درجه است؟

۱) °۲۰ ۲) °۲۴

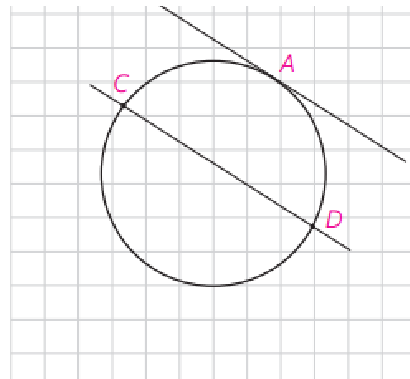
۳) °۳۲ ۴) °۳۶

تست: از نقطه M دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم و MA و MB نیز می‌نامیم. روی کمان کوچک AB نقطه دل‌خواه C را در نظرمی‌گیریم و به A و B وصل میکنیم و این زاویه نیز $3M$ می‌باشد. اندازه زاویه M چند درجه است؟

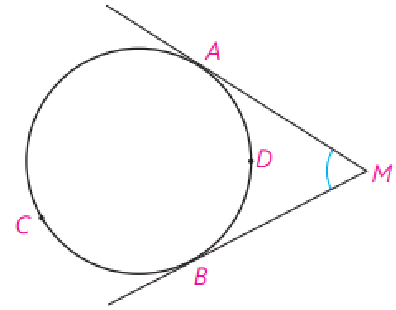
تمرین‌های کتاب صفحه ۱۶ و ۱۷:

۱ـ در شکل‌های زیر ثابت کنید :

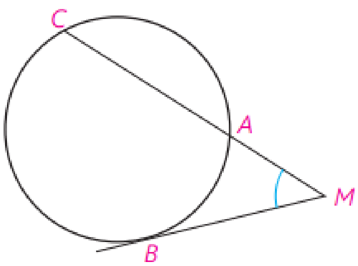
راهنمایی: از نقطهٔ B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.



الف) $d_2 \parallel d_1$، ثابت کنید $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$

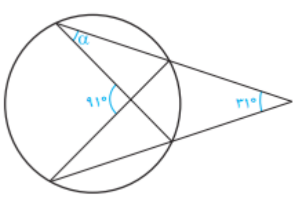


ب) $\hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{۲}$

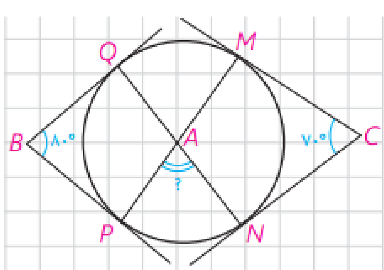


پ) $\hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$

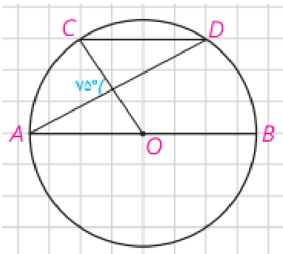
۲ـ در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ α را به‌دست آورید.



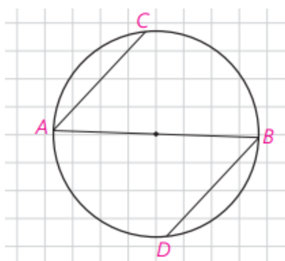
۳ـ در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟



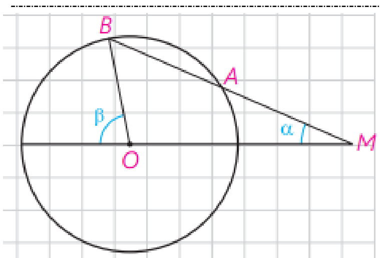
۴ــ در دایره رسم شده شکل مقابل CD||AB، اندازه کمان CD را به‌دست آورید.



۵ــ در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند.
ثابت کنید : AC = BD



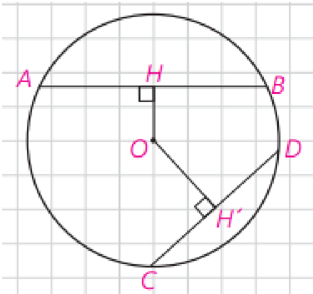
۶ــ دایرهٔ C(O,R) مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و MA = R؛ نشان دهید : $\beta = ۳\alpha$



۷ــ در دایرهٔ C(O,R)، $\widehat{AB} = ۶۰^\circ$ و AB = ۱۰ فاصلهٔ O از وتر AB را به دست آورید.

۸ـ در دایرهٔ $C(O,R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$
(OH و OH' فاصلهٔ O از دو وتر AB و CD هستند.)

راهنمایی: از O به B و C وصل، و از قضیهٔ فیثاغورس استفاده کنید.



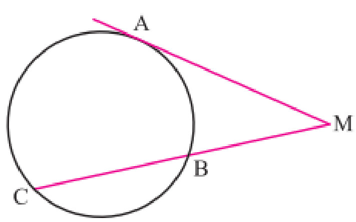
قضیه ۸: دو وتر AB و CD یکدیگر را در نقطه M داخل دایره قطع می‌کنند. ثابت کنید $MA \times MB = MC \times MD$

عکس قضیه ۸: اگر پاره‌خط‌های AB و CD در نقطه M یکدیگر را طوری قطع کرده باشند به طوری که $MA \times MB = MC \times MD$ در این صورت ثابت کنید چهار نقطه A و B و C و D روی دایره قرار می‌گیرند.

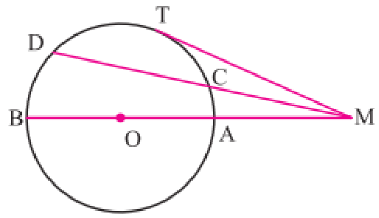
قضیه ۹: در یک دایره امتدادهای دو وتر AB و CD یکدیگر را در نقطه M خارج دایره قطع می‌کنند. ثابت کنید

$$MA \times MB = MC \times MD$$

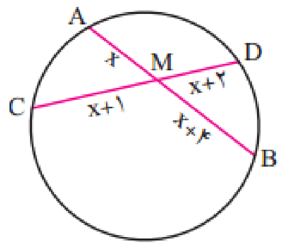
قضیه ۱۰ :در شکل مقابل MA بر دایره مماس است ثابت کنید: $MA^2 = MB.MC$

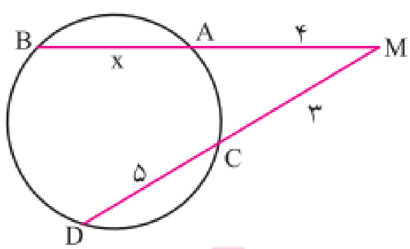


نتیجه: پس می‌توان نتیجه گرفته از هر نقطه خارج دایره:

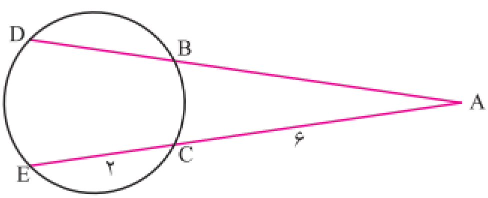


مثال ۲۲: در هر یک از اشکال زیر مقادیر مجهول را بیابید.





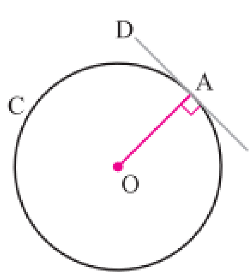
مثال ۲۳: در شکل مقابل $AB = 2BD$ در این صورت MD را بیابید.

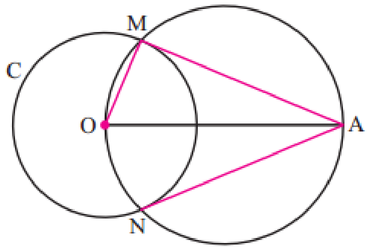


طریقه رسم مماس بر دایره:

الف) از نقطهٔ A واقع بر روی دایره:

برای رسم مماس بر دایره در نقطهٔ A از مرکز دایره به A وصل کرده، سپس در نقطهٔ A عمودی بر OA رسم می‌کنیم، این عمود بر دایره مماس می‌شود.





ب) از نقطهٔ A واقع در خارج دایره:

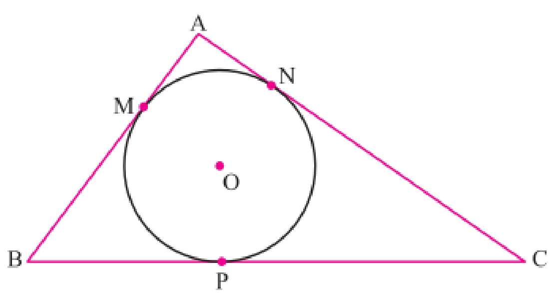
برای رسم مماس بر دایره از نقطهٔ A ابتدا از مرکز دایره به A وصل کرده و به قطر OA دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ C را در نقاط M و N قطع کند از A به نقاط M و N وصل می‌کنیم AM و AN بر دایرهٔ C مماس می‌شوند، زیرا اگر از O به M وصل کنیم، خواهیم داشت:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{ONA}}{۲} = \frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰ \Rightarrow AM \perp OM$$

بنابراین AM در نقطهٔ M بر شعاع دایره عمود شد، پس AM بر دایره مماس است، به همین ترتیب می‌توان گفت AN نیز بر دایره مماس است.

مثال ۲٤: ثابت کنید اگر از نقطه‌ای واقع در خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس مساوی و OA نیمساز زاویه A است.

مثال ۲۵: در شکل مقابل اضلاع مثلث بر دایره مماس است. اگر اضلاع AB و BC و AC به ترتیب ٦ و ۷ و ۸ باشند طول AM را بیابید.



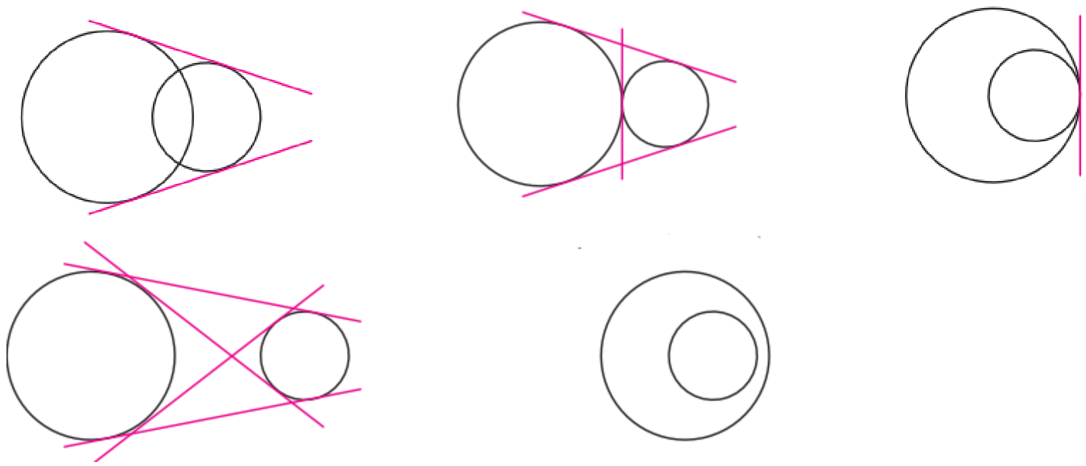
وضعیت دو دایره نسبت به هم را بیان کنید و رسم کنید.

مثال۲٦: اگر شعاع‌های دو دایره ٥ و ۷ سانتیمتر و طول خط المرکزین ۱۲ سانتیمتر باشد، دو دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟

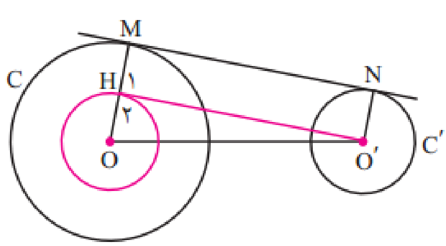
مثال۲۷: اگر شعاع‌های دو دایره ٤ و ۷ سانتیمتر و طول خط المرکزین برابر ۱۳ سانتیمتر باشد، دو دایره نسبت به هم چگونه اند؟

مماس مشترک: خطی که بر دو دایره مماس باشد، مماس مشترک نامیده می‌شود.

اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند خط، مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند خط، مماس مشترک داخلی نامیده می‌شود.



طریقهٔ رسم مماس مشترک خارجی دو دایره متخارج: دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر گرفته و مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کنیم، سپس به مرکز O و به شعاع $(R-R')$ دایره‌ای رسم کرده و از O' مماس $O'H$ را بر آن رسم می‌کنیم. از O به H وصل کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ C را در M قطع کند، سپس $O'N$ را موازی OM می‌کشیم تا دایرهٔ C' را در N قطع کند خطی که از M و N می‌گذرد بر دو دایره مماس است زیرا:

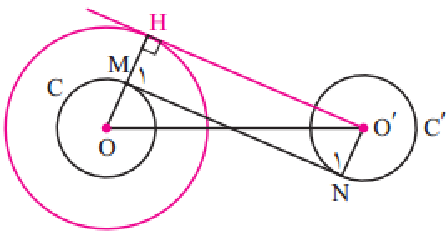


$OH \perp O'H \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ $\qquad$ $MH = OM - OH = R - (R - R') = R' = O'N$

دو ضلع مقابل $O'N$ و MH از چهارضلعی $MNO'H$ موازی و مساویند، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است چون یک زاویهٔ قائمه دارد $(\hat{H}_1 = 90^\circ)$ پس مستطیل است.

بنابراین MN بر OM و $O'N$ عمود و بر دو دایرهٔ C و C' مماس می‌باشد. اگر دو دایره مماس خارجی باشند، مماس مشترک خارجی آنها به همین روش رسم می‌شود.

$$MN = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$



طریقهٔ رسم مماس مشترک داخلی دو دایره متفارج: دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر گرفته و مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کنیم، به مرکز O و شعاع $(R+R')$ دایره‌ای می‌کشیم و از O' بر این دایره مماس $O'H$ را رسم می‌کنیم. از O به H وصل کرده و نقطه برخورد OH با دایرهٔ C را M می‌نامیم، $O'N$ را موازی OH رسم کرده و از M به N وصل می‌کنیم، پاره‌خط MN مماس مشترک داخلی دو دایره می‌باشد زیرا:

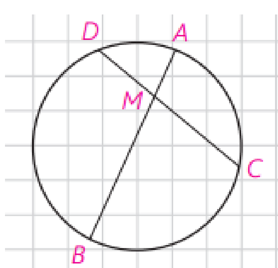
$OH \perp O'H \Rightarrow \hat{H} = 90^\circ$ $\qquad MH = O'N = R'$

دو ضلع مقابل چهارضلعی $MHO'N$ موازی و مساویند چون یک زاویهٔ قائمه دارد، پس مستطیل است. بنابراین M_1 و N_1 قائمه و MN بر دو دایره مماس است.

$$MN = \sqrt{d^2 - (R+R')^2}$$

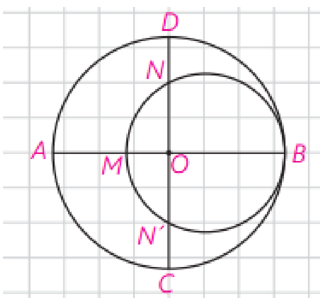
مثال۲۸ : در دو دایرهٔ متخارج طول مماس مشترک‌های داخلی و خارجی به ترتیب ۶ و $2\sqrt{21}$ سانتی‌متر و طول خط‌المرکزین آنها ۱۰ سانتی‌متر است. اندازهٔ شعاع‌های دو دایره را حساب کنید.

تمرین‌های کتاب صفحه ۲۳:

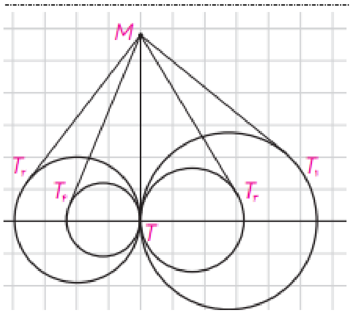


۱ــ در دایرهٔ $C(O,R)$ وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11cm$، آن‌گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

۲ــ از نقطهٔ P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خطی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کرده است و $BC = 20$. طول‌های PB و PC را به‌دست آورید.

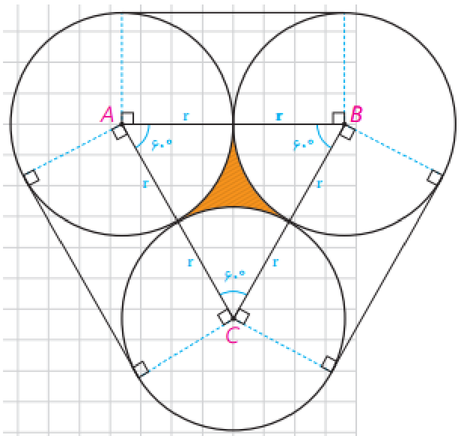


۳ــ در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر برهم عمودند. اگر $AM = 16$ و $ND = 10$، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



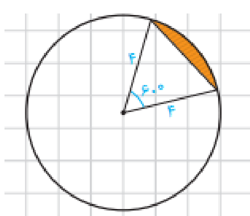
۴ــ مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T برهم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم؛ ثابت کنید

$MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$



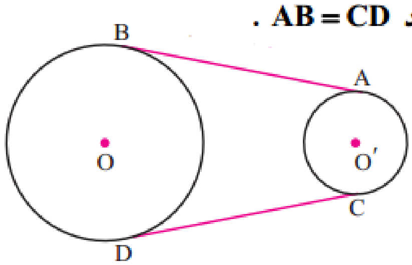
۶ــ سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو برهم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیلهٔ نخی بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $2\pi r + 6r$ است.
همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$ است.

۷ــ طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیهٔ محدود بین آنها 16π سانتی‌مترمربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به‌دست آورید.

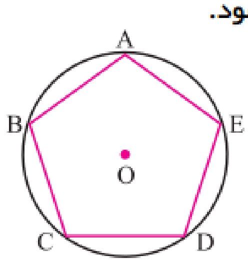


۸ــ مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.

مثال۲۹: در شکل زیر AB و CD مماس مشترک‌های خارجی دو دایره می‌باشند، ثابت کنید $AB=CD$.

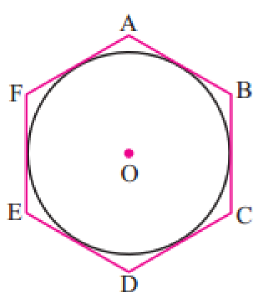


دایره محیطی: دایره‌ای که از تمام رئوس یک چند ضلعی بگذرد دایره محیطی چند ضلعی نامیده می‌شود.



در این صورت چند ضلعی را چند ضلعی محاطی می‌نامند. مرکز دایرهٔ محیطی نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌های اضلاع چند ضلعی می‌باشد. فقط برای چند ضلعی‌هایی که عمودمنصف‌های اضلاع آنها همرس باشند، می‌توان دایرهٔ محیطی رسم کرد. شعاع دایرهٔ محیطی را با R نشان می‌دهیم.

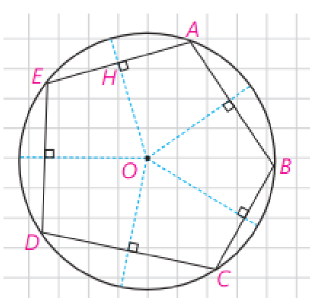
دایرهٔ محاطی: دایره‌ای که بر تمام اضلاع یک چند ضلعی مماس باشد، دایرهٔ محاطی چندضلعی نامیده می‌شود.



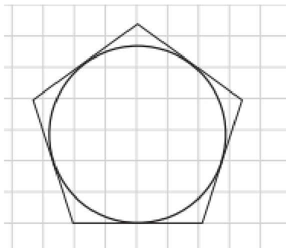
در این صورت چند ضلعی را چند ضلعی محیطی می‌نامند. مرکز دایرهٔ محاطی نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های چندضلعی می‌باشد. فقط برای چندضلعی‌هایی که نیمسازهای زوایای آن همرس باشند می‌توان دایرهٔ محاطی رسم کرد. شعاع دایره محاطی را با r نشان می‌دهیم.
همانطور که اشاره شد برای تمام چندضلعی‌ها نمی‌توان دایرهٔ محیطی یا محاطی رسم کرد، اما برای چندضلعی منتظم هم دایره محیطی و هم دایرهٔ محاطی می‌توان رسم کرد. در چندضلعی منتظم دایره‌های محیطی و محاطی هم مرکزند. مرکز چندضلعی منتظم همان مرکز دایرهٔ محیطی یا محاطی آن می‌باشد.

نکته: یک چندضلعی محاطی است اگر و فقط اگر عمودمنصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه همرس باشند.

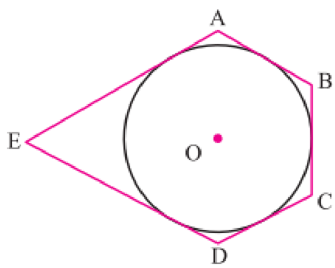
چرا؟



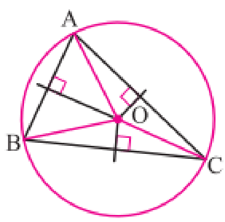
نکته: یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.



مثال۳۰: در شکل زیر یک پنج ضلعی بر دایره محیط شده است. اگر S مساحت چندضلعی و P نصف محیط آن باشد، ثابت کنید $r = \frac{S}{P}$.

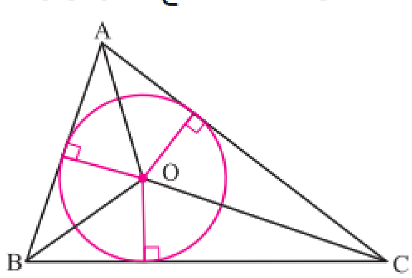


دایره‌های محیطی و محاطی مثلث



با توجه به اینکه عمودمنصف‌های اضلاع مثلث همرس و نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌ها از سه رأس مثلث به یک فاصله می‌باشند، اگر به مرکز نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌ها و به شعاع فاصلهٔ آن نقطه تا رئوس مثلث دایره‌ای رسم کنیم از سه رأس مثلث می‌گذرد، این دایره، دایرهٔ محیطی مثلث می‌باشد.

همچنین در سال‌های قبل ثابت کرده‌ایم که نیمسازهای زوایای هر مثلث همرس‌اند و نقطهٔ تلاقی نیمسازها نقطه‌ای است که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است، اگر به مرکز نقطهٔ برخورد نیمسازها و به شعاع فاصلهٔ آن نقطه تا اضلاع دایره‌ای رسم کنیم، این دایره بر اضلاع مثلث مماس می‌شود و دایره محاطی مثلث می‌باشد.

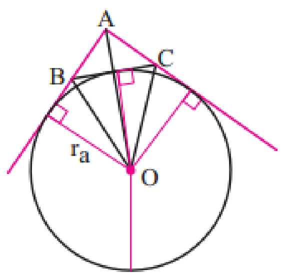


این دایره را دایرهٔ محاطی داخلی مثلث می‌نامند.

شعاع این دایرهٔ محاطی برابر $\frac{S}{P}$ می‌باشد.

$$r = \frac{S}{P}$$

علاوه بر نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث که از سه ضلع مثلث به یک فاصله می‌باشند، سه نقطهٔ دیگر نیز در خارج مثلث قرار دارند که از اضلاع مثلث به یک فاصله می‌باشند، این نقاط در واقع نقاط برخورد نیمساز یک زاویهٔ داخلی و نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی دو رأس دیگر می‌باشند.



در شکل مقابل نقطهٔ O نقطهٔ تلاقی نیمساز $\hat{A}$ و نیمسازهای زاویه‌های خارجی رئوس B، C می‌باشد که از ضلع BC و خطوط AC و AB به یک فاصله می‌باشد، به مرکز O و به شعاع فاصلهٔ O تا اضلاع مثلث دایره‌ای می‌کشیم که بر سه ضلع مماس می‌شود. این دایره را دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامیم.

شعاع دایره محاطی فوق را با r_a نشان می‌دهیم.

$$S(ABC) = S(OAB) + S(OAC) - S(OBC)$$

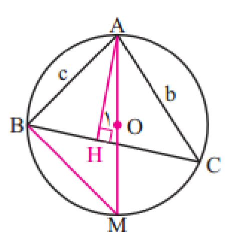
$$S = \frac{r_a.c}{۲} + \frac{r_a.b}{۲} - \frac{r_a.a}{۲} = r_a(\frac{c+b-a}{۲}) = r_a(\frac{c+b+a-۲a}{۲})$$

$$S = r_a(\frac{c+b+a}{۲} - a) \Rightarrow S = r_a(P-a) \Rightarrow r_a = \frac{S}{P-a}$$

به همین روش ثابت می‌شود شعاع‌های دایره‌های محیطی خارجی رئوس B و C برابرند با:

$$r_b = \frac{S}{P-b} \quad , \quad r_c = \frac{S}{P-c}$$

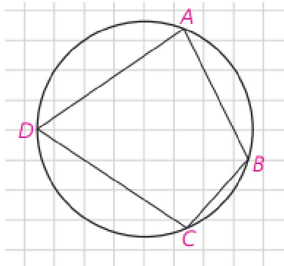
قضیه ۱۱: ثابت کنید حاصلضرب اندازه‌های دو ضلع از هر مثلث برابر است با حاصلضرب قطر دایره محیطی آن دز ارتفاع نظیر ضلع سوم.



برهان از A به مرکز دایره وصل کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره را در M قطع کند و از M به B وصل می‌کنیم.

$$A\hat{B}M = \frac{\overset{\frown}{ACM}}{۲} = \frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰$$

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{B}M = H_۱ = ۹۰^\circ \\ \hat{M} = \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABM} \sim \overset{\triangle}{AHC} \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow \frac{c}{h_a} = \frac{۲R}{b} \Rightarrow b.c = ۲R.h_a$$



قضیه۱۲: یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل یکدیگر باشند.

اثبات طرف رفت:

اثبات طرف برگشت:

قضیه۱۳: یک چهارضلعی محیطی است اگروفقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند.

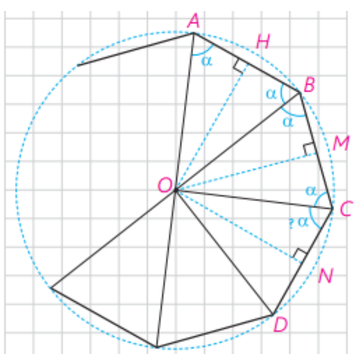
اثبات طرف رفت:

اثبات طرف برگشت:

مثال ۳۱: جدول زیر را کامل کنید.

	مربع	مستطیل	لوزی	متوازی‌الاضلاع	ذوزنقه	ذوزنقه متساوی‌الساقین	کایت
محاطی	✓	...	...	...	...	...	...
محیطی	✓	...	...	...	...	...	...

قضیه۱۴: ثابت کنید هر چندضلعی منتظم هم محاطی است و هم محیطی:



تمرین‌های کتاب صفحه ۲۹ و ۳۰ و ۳۱

۱ــ ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.

۲ــ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

۳ــ ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

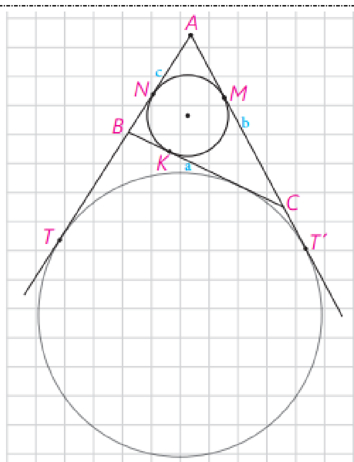
۴ــ یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

۵ــ اگر r_a , r_b و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید.

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید :

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

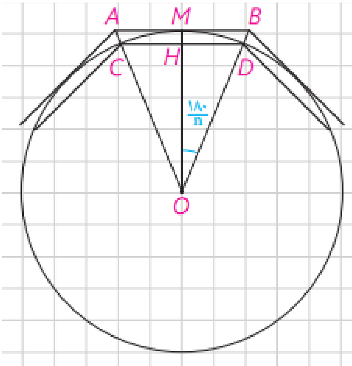


۶ــ اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن N، M و K باشند و T و T′ نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید :

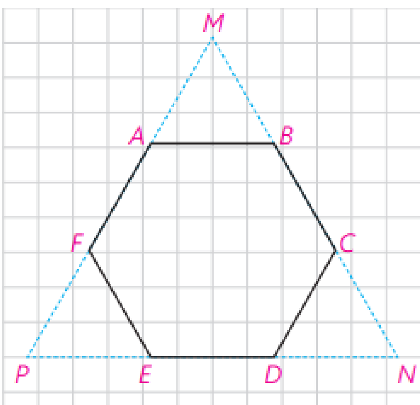
AM=AN=P−a

BN=BK=P−b, CM=CK=P−c

AT=AT′=P



۷ــ یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰°}{n}$ و $CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰°}{n}$.



۸ــ شش ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی. مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

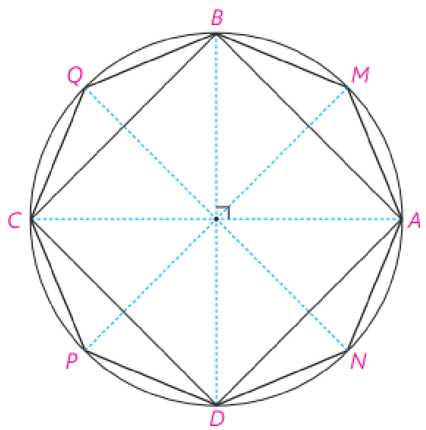
ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

پ) از نقطهٔ دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسهٔ پایهٔ ۱ می‌دانید، مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید :

$S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF}=S_{TAB}+S_{TEF}+S_{TCD}$

۹ــ دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی ABCD یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی AMBQCPDN منتظم است.



پایان فصل ۱

فصل ۲: تبدیل‌های هندسی و کاربردها

تعریف تبدیل: تبدیل T در صفحه P تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P دقیقا یک نقطه مانند A' را از صفحه P نظیر می‌کند و برعکس. پس می‌توان گفت هر نقطه مانند A' دقیقا تصویر نقطه A در همان صفحه است.

$$\begin{cases} T: P \longrightarrow P \\ T(A) = A' \end{cases}$$

تبدیل ایزومتری: تبدیلی است که طول پاره‌خط را حفظ می‌کند و تغییر نمی‌دهد و نام دیگر ایزومتری طولپا می‌باشد.

$$\begin{cases} T(A) = A' \\ T(B) = B' \end{cases} \Longrightarrow |AB| = |A'B'|$$

برای محاسبه شیب خط از فرمول مقابل استفاده می‌کنیم.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

طول پاره‌خط AB را از فرمول مقابل به دست می‌آوریم.

$$AB = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

مثال۱: نقاط داده‌شده $C(-1,0)$ و $B(5,4)$ و $A(6,5)$ را تحت تبدیل‌های زیر ببرید.

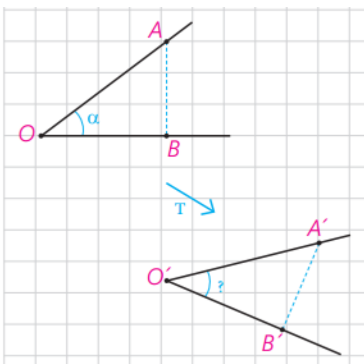
الف: $T(x,y) = (2x - 1, 3y - 2)$

ب: $T(x,y) = (-x + 3, 1 - y)$

ب: ایزومتری بودن یا نبودن هر یک از تبدیل‌های زیر را بررسی کنید.

پ: کدام یک از تبدیل‌های داده‌شده شیب را حفظ می‌کند؟

قضیه ۱: ثابت کنید تبدیل ایزومتری اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

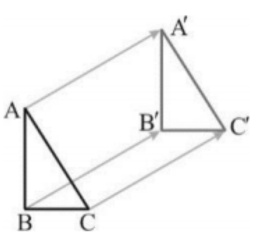


در این فصل باید تبدیل‌های زیر را یاد بگیریم: ۱- انتقال ۲- بازتاب ۳- دوران ٤- تجانس

۱- انتقال: در این تبدیل نقطه یا پاره‌خط یا شکل فقط مکانش تغییر می‌کند و هیچ اتفاقی دیگر نمی‌افتد.

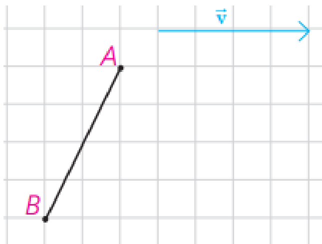
ویژگی‌های انتقال

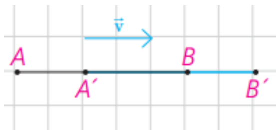
- انتقال ایزومتری (طولپا) است.
- انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.
- انتقال اندازه زاویه را حفظ می‌کند.
- بردارهای انتقال دهنده‌ی نقاط نظیر دو شکل، طول‌های برابر دارند و جهت‌شان یکسان است.

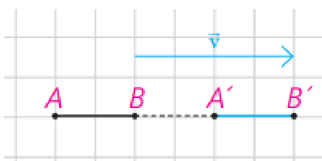


انتقال

قضیه ۲: ثابت کنید انتقال طولپاست.







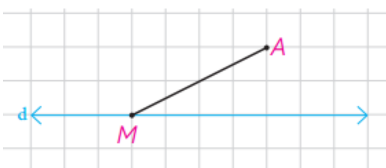
۲- <u>بازتاب</u>: برای به دست آوردن تصویر نقطه A تحت بازتاب T نسبت به خط d از نقطه A به خط d عمود رسم کرده و پای عمود را H می‌نامیم. سپس این پاره‌خط را اندازه AH امتداد داده تا به نقطه A' برسیم. A' را تبدیل‌یافته نقطه A تحت تبدیل T است.

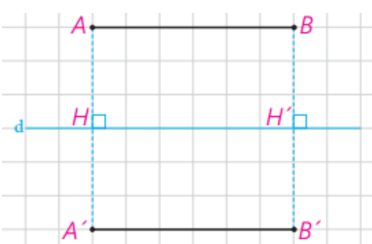
خط d را محور بازتاب می‌نامیم.

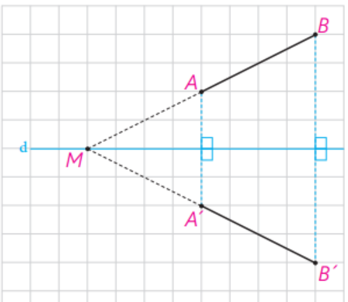
نقطه ثابت:

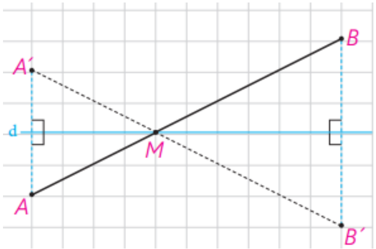
مثال۲: هر یک از حالت‌های زیر نسبت به خط d بازتاب کنید.

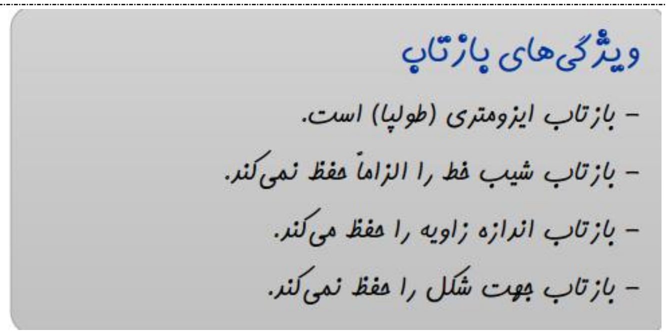
قضیه ۳: ثابت کنید بازتاب یک تبدیل ایزومتری(طولپا) است؟











بازتاب نسبت به نقطه O: در بازتاب نسبت به نقطه o ابتدا از نقطه داده شده به o وصل می‌کنیم و به همان اندازه امتداد می‌دهیم.

قضیه٤: آیا بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند؟ هر حالت را اثبات و بیان کنید.

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید :

الف) وقتی A' بازتاب A نسبت به خط d است، بازتاب A' نسبت به خط d، کدام نقطه است؟ .... چرا؟

ب) قرینهٔ قرینهٔ هر نقطه چیست؟ ....

در واقع : .... = S(......) = S(S(A)) و به زبان ساده‌تر ......=$(A')'$

پ) در هر بازتاب تبدیل یافتهٔ یک مثلث، یک .... است که با مثلث اولیه .... است.

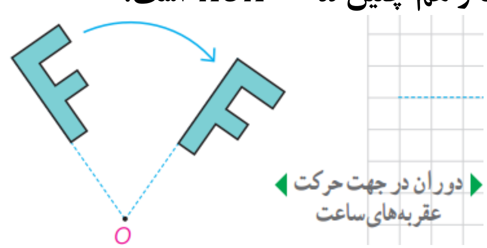
ت) در حالتی که پاره خط AB نسبت به خط بازتاب .... باشد، بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند.

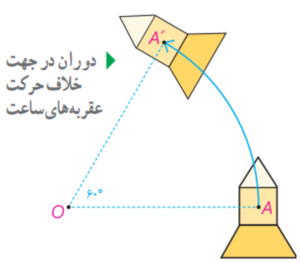
ث) در هر بازتاب نسبت به خط d تبدیل یافتهٔ تمام نقاط روی خط، .... است؛ بنابراین تعداد نقاط ثابت تبدیل در هر بازتاب .... است.

در ادامه به کمک ویژگی‌های انتقال و دوران ثابت می‌کنیم که این دو تبدیل نیز طولپا هستند.

۳- دوران: دوران R به مرکز نقطه ثابت o و زاویه α تبدیلی است که در آن تصویر نقطه A نقطه‌ای است مانند A' به طوری که

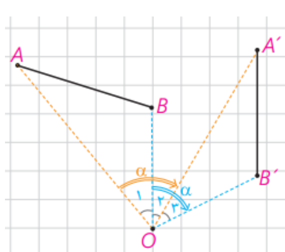
$OA = oA'$ و هم چنین $AOA' = \alpha$ است.

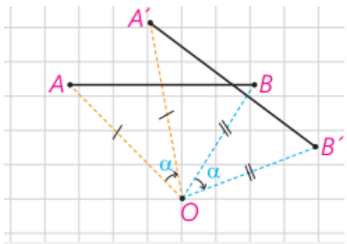


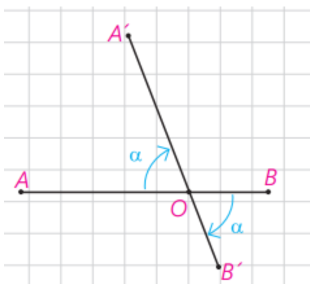


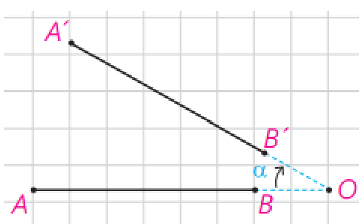
قضیه ٤: ثابت کنید دوران تبدیلی طولپاست.

قضیه را در ٤ حالت ثابت می‌کنیم.



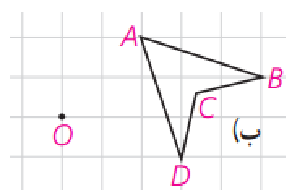


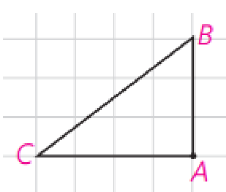




مثال۳: الف: دوران به مرکز A تحت زاویه ۹۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت رسم کنید.

ب: دوران به مرکز O تحت زاویه ۱۲۰ درجه در جهت خلاف عقربه‌های ساعت رسم کنید.





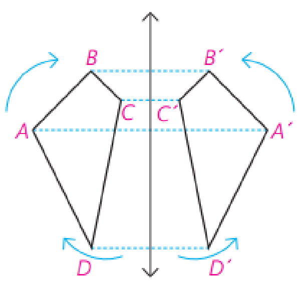
چند نکته مهم: الف: دوران تحت زاویه ۱۸۰ درجه ۱۸۰- درجه همان بازتاب نسبت به نقطه می‌باشد.

ب: دوران تحت زاویه ۲۷۰ درجه خلاف عقربه‌های ساعت همان دوران ۹۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت است.

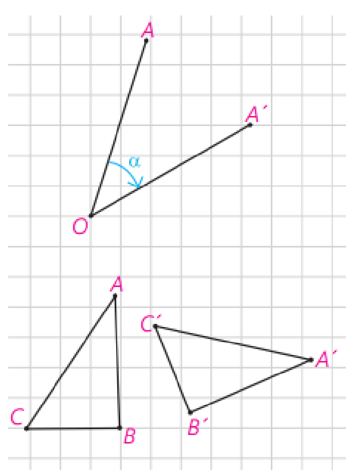
پ: دوران تحت زاویه ۳٦۰ در شکل روی خودش میفتد.

تمرین‌های صفحه ٤٤ و ٤٥

۱ــ در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.



۲ــ در شکل زیر چهار ضلعی $A'B'C'D'$ تصویر **چهارضلعی محدب** ABCD تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به B، C و D می‌رویم، جهت حرکت، موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟



۳ــ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) در شکل مقابل نقطهٔ A' دوران یافتهٔ نقطهٔ A در دوران به مرکز O و زاویه α است. نشان دهید عمودمنصف AA' از نقطهٔ O می‌گذرد.

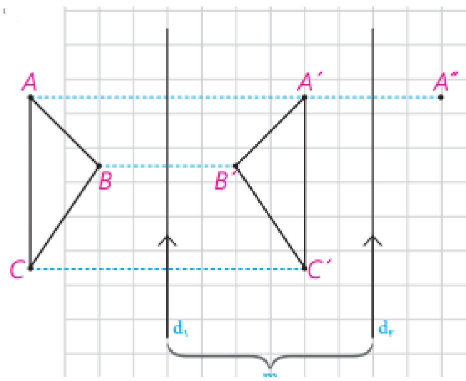
ب) اگر بدانیم $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ دوران یافتهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ است، چگونه می‌توان مرکز دوران را مشخص کرد؟

۴ــ در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصلهٔ m از آن قرار دارد و مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید.

الف) نشان دهید : $AA''=2m$

ب) اندازهٔ BB'' و CC'' چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

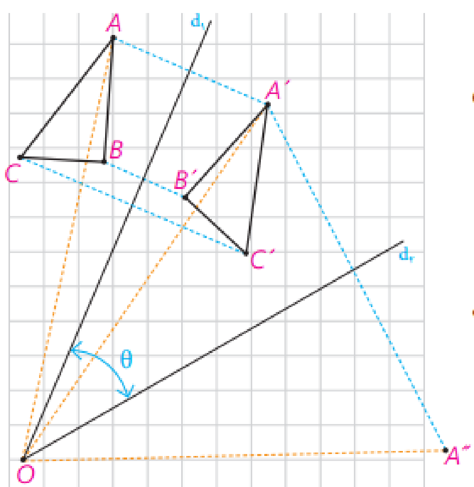


۵ــ در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویهٔ θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید.

الف) نشان دهید : $\widehat{AOA''}=2\theta$

ب) اندازهٔ $\widehat{COC''}$ و $\widehat{BOB''}$ چقدر است؟

پ) باچه تبدیلی می‌توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



۶ــ نقطهٔ A به فاصلهٔ $۲\sqrt{۶}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطهٔ A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطهٔ A′ می‌نامیم. نقطهٔ A را حول نقطهٔ A′ به اندازهٔ ۱۲۰ درجه دوران می‌دهیم تا نقطهٔ A″ حاصل شود. طول پاره‌خط AA″ را محاسبه کنید.

۷ــ نقطهٔ A′ تصویر نقطهٔ A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر AA′=۱۶ و نقطه O روی خط l و OA=۱۰ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط OA′ چقدر است؟

۴- تجانس: تجانس تبدیلی است که شکل را کوچک و بزرگ می‌کند.

تعریف: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و k≠۰ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M′ را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) سه نقطه O، M و M′ روی یک خط راست باشند.

ب) $OM' = |k|.OM$

پ)
- اگر k مثبت باشد، M′ روی نیم خط OM و نقاط M و M′ در یک طرف نقطهٔ O قرار دارند.

مثال: $OM' = ۲OM$  $k = ۲$

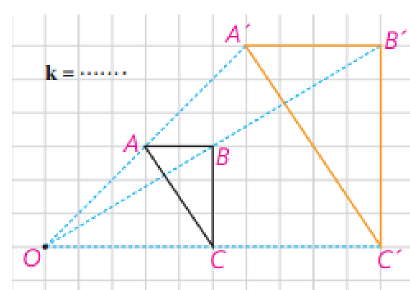
$OM' = \frac{۱}{۲}OM$  $k = \frac{۱}{۲}$

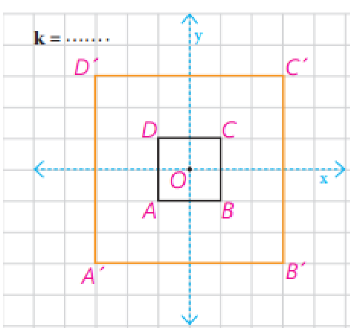
- اگر k منفی باشد، نقطه O بین نقاط M و M′ قرار می‌گیرد.

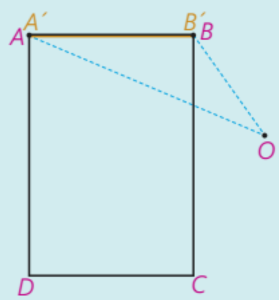
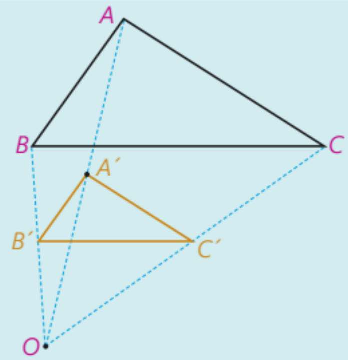
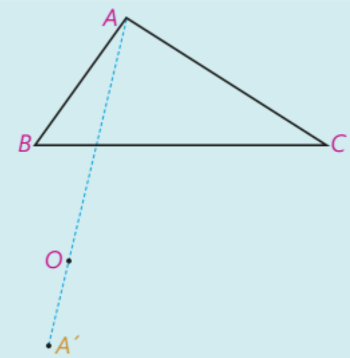
مثال: $OM' = ۲OM$  $k = -۲$

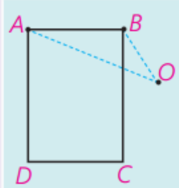
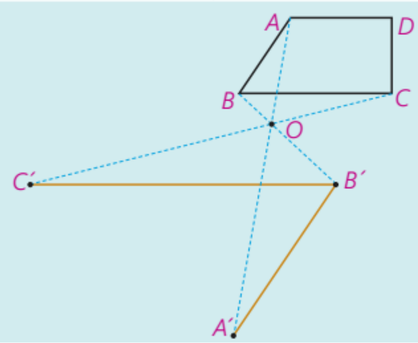
جدول مهم تجانس و حالت‌های خاص:

تجانس و طول اضلاع و محیط و مساحت:





k	$k=1$	$0<k<1$	$-1<k<0$
مثال		$k=\frac{1}{2}$	$k=-\frac{1}{3}$
			

k	$k=-1$	$k<-1$
مثال		$k=-2$
		

ویژگی‌های مهم تجانس:

			طولپاست	اندازهٔ زاویه حفظ می‌شود.	شیب خط حفظ می‌شود.	جهت شکل حفظ می‌شود.	مساحت شکل حفظ می‌شود.
تجانس	$k > 0$	$k > 1$					
		$k = 1$					
		$0 < k < 1$					
	$k < 0$	$-1 < k < 0$					
		$k = -1$					
		$k < -1$					

قضیه ۵: تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

قضیه۶: تجانس اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

۱ــ الف) فرض کنید پاره‌خط $A'B'$ مجانس پاره‌خط AB در تجانس به مرکز O و نسبت k باشد؛ نشان دهید : $\frac{A'B'}{AB}=|k|$

ب) اگر nضلعی $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ مجانس nضلعی $A_1 A_2 \dots A_n$ باشد، نشان دهید این دو nضلعی با هم متشابه‌اند.

۲ــ با توجه به ویژگی‌های تجانس و به کمک مثال نقض نشان دهید دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.

جدول زیر را کامل کنید.

	طول پاره‌خط را حفظ می‌کند.	اندازهٔ زاویه را حفظ می‌کند.	شیب خط را حفظ می‌کند.	جهت شکل را حفظ می‌کند.	مساحت شکل را حفظ می‌کند.
بازتاب					
انتقال					
دوران					
تجانس					

تعریف: تبدیل T را تبدیل همانی گوییم، هر گاه به ازای هر نقطهٔ A از صفحهٔ P داشته باشیم $T(A) = A$.

دقت کنید که در بازتاب به جز نقاطی که روی خط بازتاب قرار دارند، تصویر هر نقطه مثل A، نقطه‌ای مثل A' است که در طرف دیگر خط بازتاب قرار دارد. بنابراین بازتاب هیچ‌گاه، تبدیل همانی نیست.

الف) در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس، می‌توانند تبدیل همانی باشند؟

ب) آیا تبدیل همانی طولپاست؟

پ) توضیح دهید که در هر یک از تبدیل‌های زیر، آیا می‌توان نقاط ثابت تبدیل داشت؟

۱ــ انتقال غیرهمانی :

۲ــ دوران غیرهمانی :

۳ــ تجانس غیرهمانی :

تمرین کتاب صفحه ۵۰ و ۵۱

۱ــ در تجانسی با نسبت $k<0$ و مرکز تجانس O (نقطه O را خارج AB در نظر بگیرید) نشان دهید :

الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می‌کند.

۲ــ دایره $C(O,R)$ و نقطهٔ M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطهٔ M در هر حالت رسم کنید.

(**راهنمایی:** تصویر مرکز و یک نقطه دلخواه از دایره را تحت تجانس پیدا کنید.)

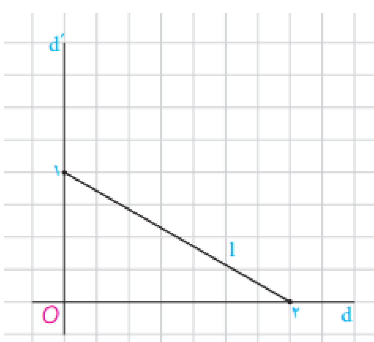
الف) $k=2$

ب) $k=-2$

پ) $k=\frac{1}{2}$

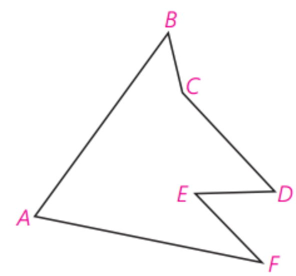
۳ــ یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و به مرکز محلی تلاقی قطرها تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد، محیط مربع اولیه را محاسبه کنید.

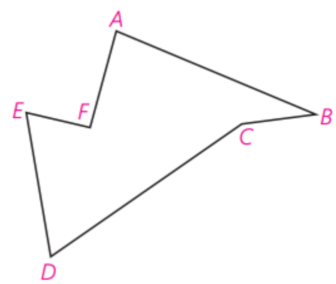
۴ــ در شکل روبه‌رو اگر خط l را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{7}{4}$ تصویر کنیم و آن را l' بنامیم، مساحت بین خط l و l' و خطوط d و d' چقدر است؟

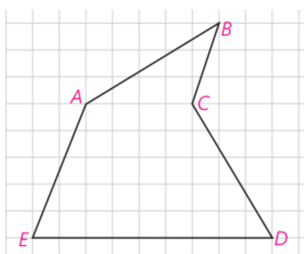


کاربردهای بازتاب (قرینه‌یابی)

یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است که به مسائل هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی معروف‌است. در این گونه مسائل، هدف این است که بدون اینکه محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چند ضلعی را تغییر دهیم

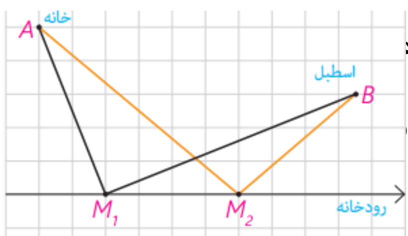




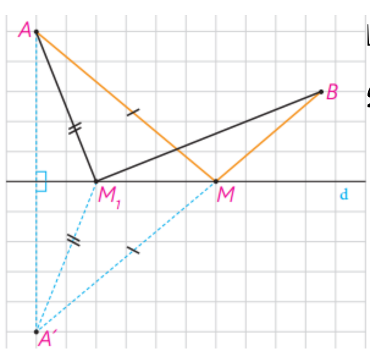


مسائل کوتاهترین مسیر

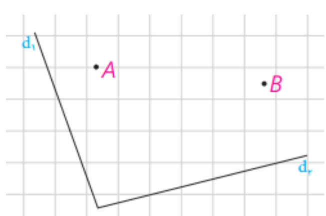
مثال ۱: مردی میخواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه ای که لبه مستقیم
و بعد سطل آب را به اسطبل ببرد که در همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه ا
آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی میکند، کمترین حالت ممکن باشد؟

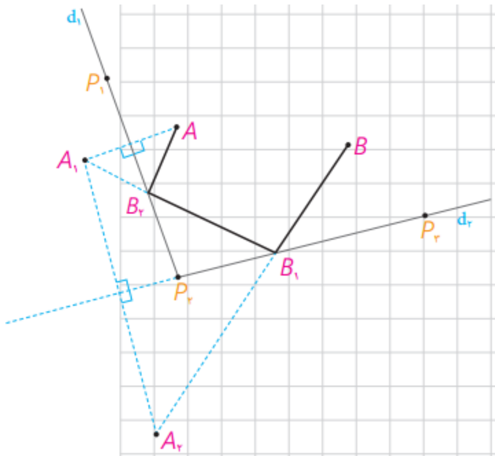


پاسخ: هرون ابتدا بازتاب A را نسبت به خط پیدا کرد و آن را A' نامید. خط فرضی $A'B$
خط بازتاب را در نقطه ای مثل M قطع میکند. او مدعی شد که M جواب مسئله است و
$MB + MA$ کوتاهترین مسیر ممکن است

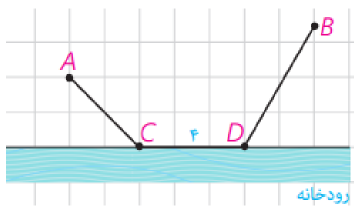


مثال ۲: دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض اند. چگونه میتوان با طی کوتاه ترین مسیر از نقطه A آغاز به حرکت کرد و پس از برخورد با دو خط d_1 و d_2 از نقطه B گذشت؟



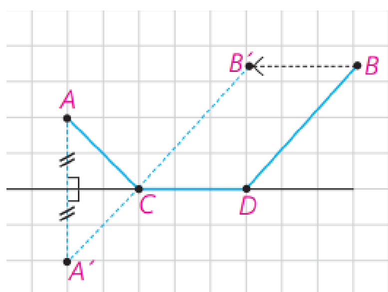


حل: برای پیدا کردن کوتاهترین مسیر به روش زیر عمل میکنیم:
قرینه A را نسبت به خط d_1 نقطه A_1 و قرینه A_1 را نسبت به خط d_2، نقطه A_2 می‌نامیم .
از A_2 به B وصل می کنیم و نقطه برخورد آن را با d_2 ، B_1 مینامیم .
به همین ترتیب از B_1 به A_1 وصل می کنیم و نقطه برخورد آن را با d_1، B_2 مینامیم. از A به B_2 وصل میکنیم. ادعا میکنیم که مسیر مورد نظر AB_2B_1B است.



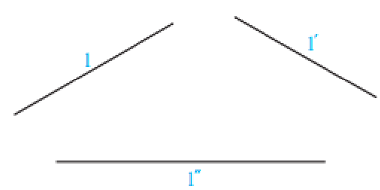
مثال ۳: دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه ای واقع اند. میخواهیم جاده ای از A به B بسازیم به‌طوریکه ٤ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ٤ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر ABCD کوتاهترین مسیر ممکن باشد؟

پاسخ:



تمرین‌های صفحه ٥٦

۳ــ سه خط دو به دو ناموازی l و ′l و ″l در صفحه مفروض‌اند. پاره‌خطی به‌طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی l و ′l ، و موازی ″l باشد.



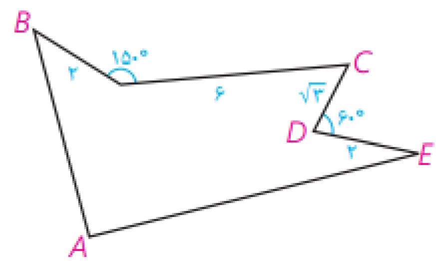
۴ــ فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K=-\frac{1}{2}$ باشد.

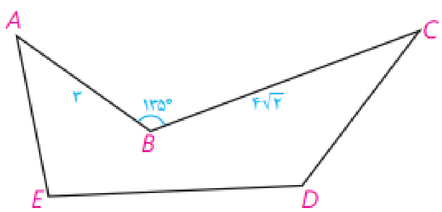
الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟

ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

---

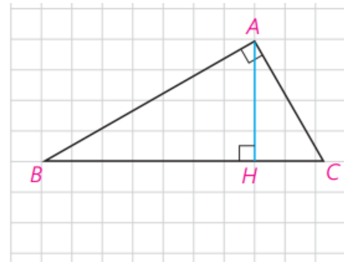
۵ ــ زمینی به شکل زیر داریم، می‌خواهیم بدون آنکه محیط این زمین تغییر کند مساحتش را افزایش دهیم در هر مورد میزان افزایش مساحت را حساب کنید.





فصل سوم: روابط طولی در مثلث

در سال گذشته در مورد روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه را یاد گرفتیم و به صورت زیر بود.



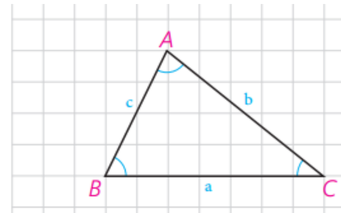
۱ـ $AB^۲=BC.BH$

۲ـ $AC^۲=BC.CH$

۳ـ $AH^۲=BH.CH$

۴ـ $AB^۲+AC^۲=BC^۲$

۵ـ $AB.AC=BC.AH$



قضیهٔ سینوس‌ها: در مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ ، $AC=b$ و $AB=c$ داریم:

$$\frac{a}{\text{SinA}}=\frac{b}{\text{SinB}}=\frac{c}{\text{SinC}}=۲R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

قضیه ۱: قضیه سینوس‌ها را بیان کنید و در ۳ حالت اثبات کنید.

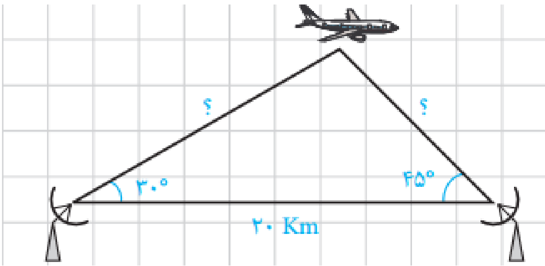
حالت ۱: وقتی مثلث قائم‌الزاویه باشد.

حالت ۲: وقتی مثلث دارای زاویه تند باشد .

حالت ۳: وقتی مثلث دارای زاویه باز باشد.

مثال ۱: در مثلث ABC اندازه $BC = 10$ و $A = 120^\circ$ و $AC = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ باشد مقدار شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زاویه‌های دیگر مثلث را بیابید.

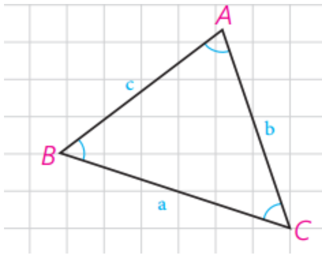
مثال۲: در شکل مقابل مقادیر مجهول را بیابید.



مثال۳: ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC که $A=90°$ با ارتفاع $AH=h_a$ داریم:

$$\frac{1}{h_a}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

قضیه ۲: قضیه کسینوس‌ها را بیان و در ۳ حالت اثبات کنید.



حالت ۱: وقتی مثلث قائم‌الزاویه باشد.

حالت ۲: وقتی مثلث دارای زاویه تند باشد.

حالت ۳: وقتی مثلث دارای زاویه باز باشد.

مثال٤: در مثلث ABC اندازه $AB = 2\sqrt{2}$ و $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $A = 60^\circ$ باشد اندازه ضلع BC و زاویه C را بیابید.

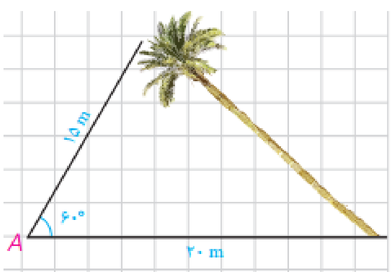
تمرین کتاب صفحه ٦٨ و ٦٩

۱ــ یک درخت کج از نقطهٔ A روی زمین، که در فاصلهٔ ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویهٔ °۶۰ دیده می‌شود. اگر فاصلهٔ A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است :

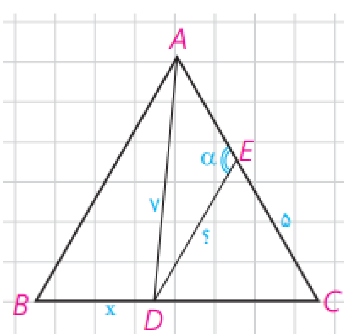
الف) طول درخت

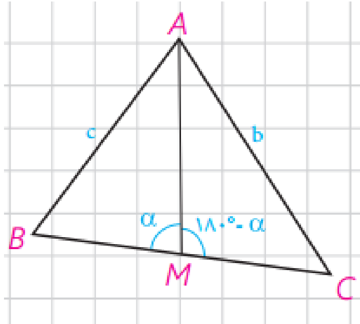
ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

پ) فاصلهٔ نوک درخت از زمین



۲ــ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطهٔ D ، که به فاصلهٔ ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟(CD >BD) نقطهٔ E ، که به فاصلهٔ ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازهٔ زاویهٔ AED چند درجه است؟

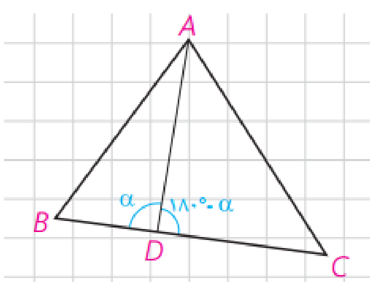




۴ــ در مثلث ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم ($MB = MC = \frac{a}{۲}$). با نوشتن قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، $b^۲$ و $c^۲$ را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

$$b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$ (قضیهٔ میانه‌ها)

در حالت خاص AB=۴ و AC=۶ و BC=۸، طول میانه AM را به‌دست آورید.

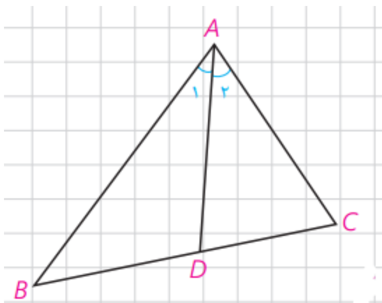


۵ــ در مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

$$AB^۲ \,.\, DC + AC^۲ \,.\, DB = AD^۲ \,.\, BC + DB \,.\, DC \,.\, BC$$ (قضیهٔ استوارت)

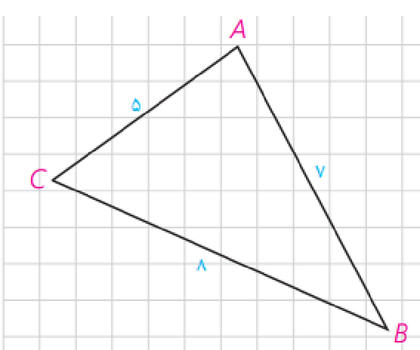
به کمک قضیهٔ استوارت، درستی قضیهٔ میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

قضیه۳: در هرمثلث نیمساز هر زاویه داخلی ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می-کند.

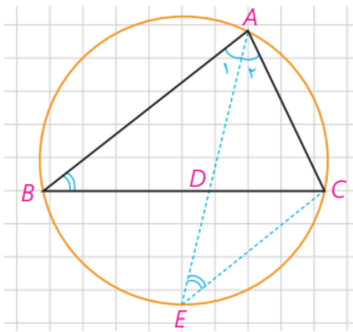


مثال۵: در مثلث ABC اندازه $BC = 8$ و $AC = 5$ و $AB = 7$ باشد. طول قطعات ایجاد شده توسط نیمساز زاویه B بر روی ضلع مقابلش را به دست آورید.

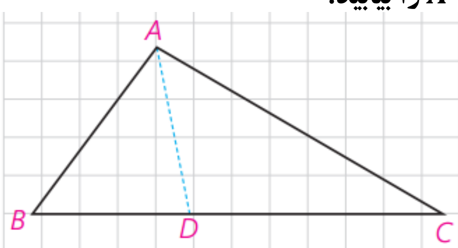
مثال٦: در شکل روبه رو نیمساز زاویه C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه ای را به‌دست آورید که این نیمساز روی AB جدا میکند.



قضیه ٤: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر نیمساز داخلی برابر است با حاصلضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصلضرب اندازه دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد میکند.

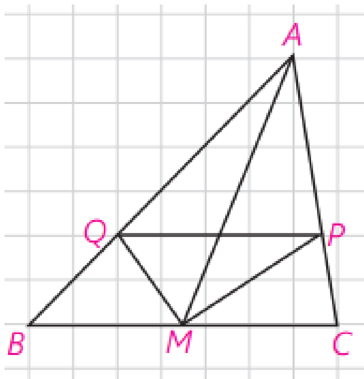


مثال۷: در مثلث ABC، $AB = 3$, $AC = 5$, $BC = 7$ است. طول نیمساز زاویه A را بیابید.



تمرین‌های کتاب صفحه ۷۲:

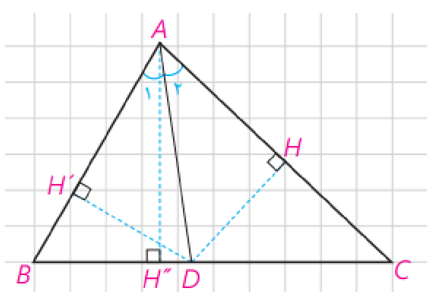
۱ــ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید : PQ||BC



۲ــ در مثلث ABC، AB=۷ و AC=۴ و BC=۱۰ است. طول نیمساز زاویهٔ داخلی C را به‌دست آورید.

۳ــ با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید :

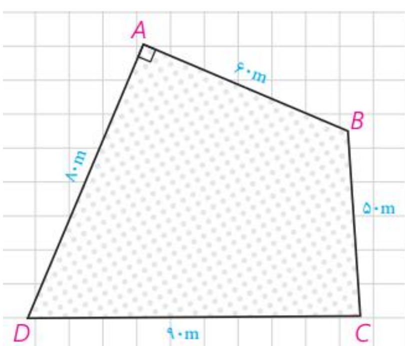
الف) چرا $DH = DH'$؟



قضیه ۵: قضیه هرون را بیان کنید.

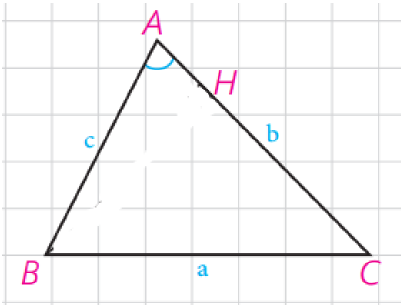
مثال۸: مساحت مثلث با اضلاع به طول‌های ۱۳، ۱٤ و ۱۵ به کمک دستور هرون بیابید سپس ارتفاع وارد بر هر ضلع را مشخص کنید.

مثال۹: در شکل مقابل مساحت را بیابید.

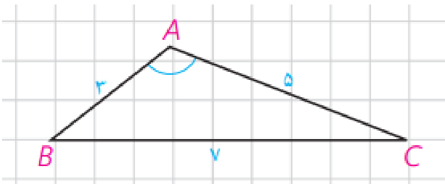


روش دوم محاسبه مساحت مثلث با استفاده از دو ضلع و زاویه بینشان.

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} b\, c \times sinA \\ S = \frac{1}{2} a\, c \times sinB \\ S = \frac{1}{2} a\, b \times sinC \end{cases}$$



۱ــ مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به‌دست آورید.



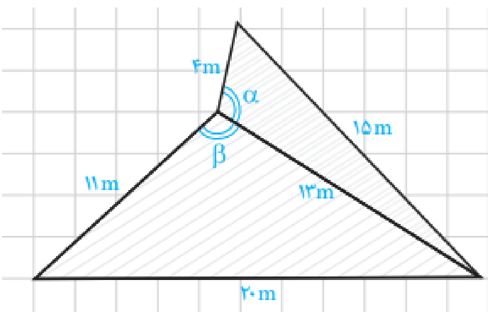
$$P = \frac{.... + ... + ...}{۲} = ... \Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = ...$$

۲ــ مساحت مثلث را با استفاده از دستور $S = \frac{۱}{۲} AB.AC.\sin A$ بنویسید.

۳ــ از مقایسهٔ نتایج ۱ و ۲، اندازهٔ زاویهٔ منفرجهٔ $\hat{A}$ را به‌دست آورید.

تمرین‌های کتاب صفحه ۷۵ و ۷۶

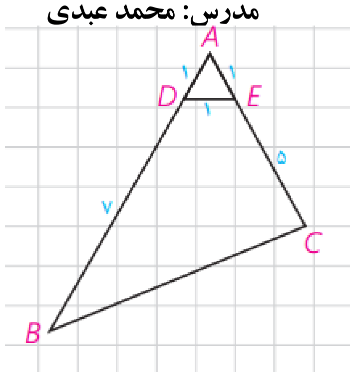
۱ــ در مثلث ABC، AB=۱۰، AC=۶ و $\hat{A}=60^\circ$. الف) طول BC را به‌دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار sinB را پیدا کنید.



۲ــ دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟

نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد. $(\alpha=\beta)$

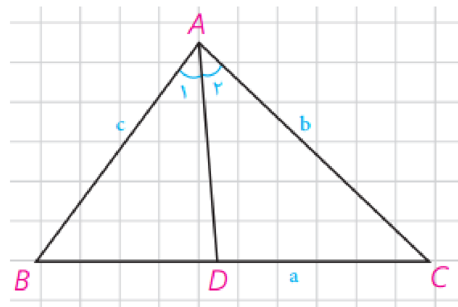
۳- دستور محاسبه مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به‌دست آورید.



۴ــ در شکل مقابل، اولاً طول BC را به‌دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.

۵ــ در شکل صفحه بعد AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است.

با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبهٔ طول نیمساز زاویهٔ A به‌دست آورید.



$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ACD} \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A=\frac{۱}{۲}\cdots\times\cdots\times\sin\frac{A}{۲}+\frac{۱}{۲}\cdots\times\cdots\times\sin\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AB.AC.\sin A=AD.\sin\frac{A}{۲}(\cdots+\cdots)$$

$$\Rightarrow AD=\frac{AB.AC.\sin A}{(\cdots+\cdots)\sin\frac{A}{۲}}=\frac{۲AB.AC.\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}}{(\cdots+\cdots)\sin\frac{A}{۲}}$$

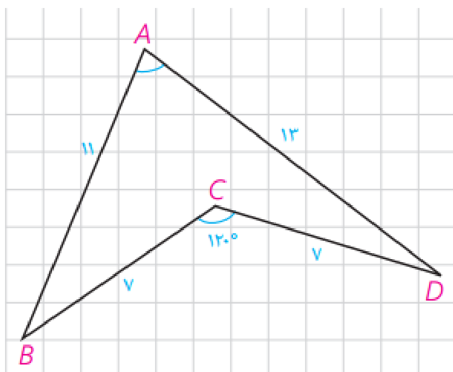
$\Rightarrow AD=\cdots\cdots \Rightarrow$ (نیمساز رأس A) $d_a=\dfrac{۲bc.\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$

۶ــ در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصلهٔ ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟

راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.

۷ــ در شکل، اولاً اندازهٔ زاویهٔ A را به‌دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.

راهنمایی: B را به D وصل کنید.



۸ــ ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.

۹ــ به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC :

الف) $\hat{A} > 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$

ب) $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$

پ) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$

۱۰ــ به کمک نتیجهٔ تمرین ۹، حاده(تند)، قائمه یا منفرجه(باز) بودن زاویهٔ A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید :

الف) $AB=10$, $AC=6$, $BC=9$

ب) $AB=8$, $AC=4$, $BC=9$

پ) $AB=8$, $AC=15$, $BC=17$

پایان کتاب درسی