

ریاضی ۱

پایه دهم

سری ۶

Math

مدرس و گردآورنده

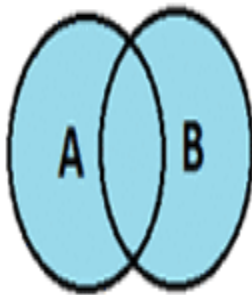
عباس مدحی

فهرست مطالب

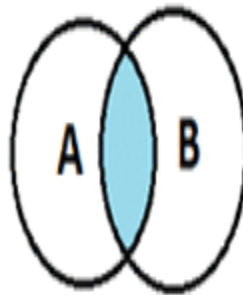
فصل ۱ - مجموعه ها	۱
تمرین و تست مجموعه ها	۹
دنباله و تصاعد	۱۵
تمرین و تست دنباله و تصاعد	۲۱
فصل ۲ - مثلثات	۲۶
تمرین و تست فصل ۲	۳۹
فصل ۳ - توان های گویا و عبارت های جبری	۵۲
تمرین و تست فصل ۳	۵۶
فصل ۴ - معادله ها و نا معادله ها	۶۷
تمرین و تست فصل ۴	۷۴
فصل ۵ - تابع	۸۵
تمرین و تست فصل ۵	۹۸
فصل ۶ - شمارش بدون شمردن	۱۱۲
تمرین و تست فصل ۶	۱۲۵
فصل ۷ - آمار و احتمال	۱۳۴
تمرین و تست فصل ۷	۱۵۱



فصل اول مجموعه ها و تصاعدها



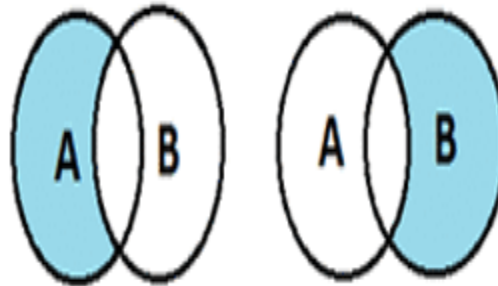
Union



Intersection



Complement of A



Difference

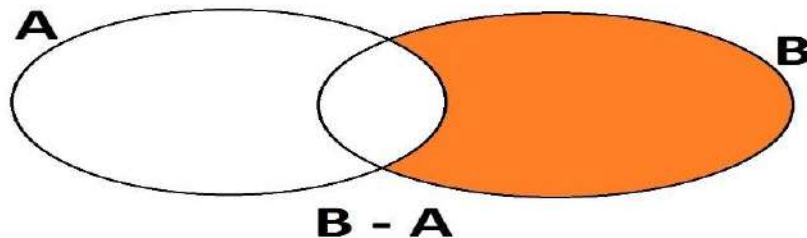
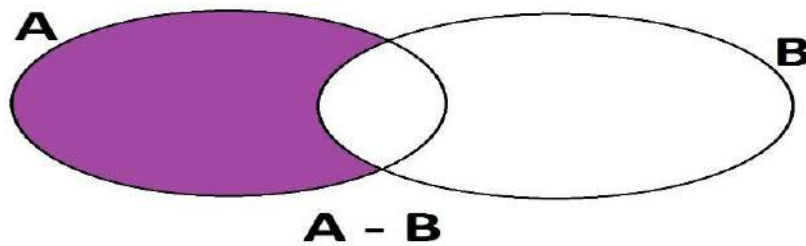
$(A - B)$

$(B - A)$

مجموعه ها

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$A - B = A \cap B'$$



بازه:

بازه زیر مجموعه هایی از \mathbb{R} (اعداد حقیقی) است که مشخص کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی می باشد.

۱- بازه باز از چپ و راست:



۲- بازه باز از چپ و بسته از راست:



۳- بازه بسته از چپ و باز از راست:



۴- بازه بسته از چپ و راست:



مجموعه های متناهی:

مجموعه هایی را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، مجموعه های می نامیم.

تمرین

- ۱ فرض کنید U مجموعه تمام مضرب های طبیعی عدد ۵ باشد.
 - الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.
 - ب) U متناهی است یا نامتناهی؟
 - پ) یک زیرمجموعه متناهی از U بنویسید.
 - ت) دو زیرمجموعه نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به طوری که $C \subseteq D$.
- ۲ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید.
 - الف) مجموعه اعداد طبیعی.
 - ب) مجموعه شماره های طبیعی عدد ۳۶.
 - پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.
 - ت) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$.
 - ث) مجموعه مضرب های طبیعی عدد ۱۰۰.

جبر گزاره ها:

تعریف گزاره: گزاره جمله ای خبری است که درست یا نادرست است.

نقیض یک گزاره:

اگر ارزش یک گزاره درست باشد، ارزش نقیض آن گزاره نادرست است و اگر ارزش یک گزاره نادرست باشد، ارزش نقیض آن گزاره درست است. نقیض گزاره p را با $\sim p$ نمایش می دهیم.

ترکیب عطفی ($p \wedge q$):

هرگاه بین دو گزاره ساده حرف ربط « و » قرار دهیم، گزاره مرکب را ترکیب عطفی می نامیم. در زبان ریاضی « و » را با نماد « \wedge » نمایش می دهند.

ترکیب عطفی وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند.

اگر یکی از مولفه ها و یا هر دو مولفه نادرست باشند، آن گاه ترکیب عطفی نادرست است.

نکته - ترکیب عطفی دارای خاصیت جابجایی است. $p \wedge q \equiv q \wedge p$

ترکیب فصلی ($p \vee q$):

هرگاه بین دو گزاره ساده حرف ربط « یا » قرار دهیم، گزاره مرکب را ترکیب فصلی می نامند. در زبان ریاضی « یا » را با نماد « \vee » نمایش می دهند.

ترکیب فصلی هنگامی درست است که

یکی از دو گزاره یا هر دو گزاره

درست باشند.

اگر هر دو مولفه نادرست باشند، آن

گاه ترکیب فصلی نادرست است.

نکته - ترکیب فصلی دارای خاصیت

جابجایی است. $p \vee q \equiv q \vee p$

قوانین دمورگان:

۳ دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه ای متناهی باشد.

۴ حاصل هر یک از مجموعه های زیر را با رسم بازه های آنها روی یک محور به دست

آورید:

الف) $(-3, 0) \cup (-2, 5)$ ب) $(-\infty, 6] \cap (2, 9)$

پ) $(3, +\infty) \cap (6, 10]$ ت) $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$

ث) $(3, +\infty) - [2, 4)$ ج) $[2, 4) - (3, +\infty)$

۵ مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه

بنویسید.

۶ اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

$$۱) \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$۲) \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

قوانین شرکت پذیری :

$$۱) p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$۲) p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

قوانین شرکت پذیری در جمع و ضرب با مثال :

$$۲) ۵ \times (۴ \times ۳) = (۵ \times ۴) \times ۳$$

$$۱) ۲ + (۴ + ۷) = (۲ + ۴) + ۷$$

قوانین توزیع پذیری (خاصیت پخشی) :

$$۱) p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$۲) p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع با مثال :

$$۴ \times (۳ + ۷) = (۴ \times ۳) + (۴ \times ۷)$$

$$۱) p \wedge p \equiv p \quad \text{و} \quad ۲) p \vee p \equiv p \quad \text{نکته-}$$

تمرین - طرف دوم هم ارزی های زیر را بنویسید.

$$۲) P \wedge F \equiv$$

$$۳) P \vee T \equiv$$

$$۴) P \vee F \equiv$$

$$۱) P \wedge T \equiv$$

$$۶) p \vee \sim p \equiv$$

$$۷) \sim T \equiv$$

$$۸) \sim F \equiv$$

$$۵) p \wedge \sim p \equiv$$

قوانین جذب:

$$۱) p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$۲) p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$:

گزاره های شرطی (ترکیب شرطی) به صورت « اگر P آنگاه q بیان می شوند. در زبان ریاضی آنگاه با نماد « \Rightarrow » نمایش داده می شود.

در ترکیب شرطی مولفه اول (p) ، مقدم (شرط) و مولفه دوم (q) ، تالی (جواب شرط) نامیده می شود.

ترکیب شرطی هنگامی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

در سایر موارد ارزش ترکیب شرطی درست است.

نکته - عکس نقیض ترکیب شرطی با ترکیب شرطی هم ارزش است:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

ترکیب دو شرطی ($p \Leftrightarrow q$) :

ترکیب دو شرطی ، از ترکیب دو گزاره شرطی عکس یک دیگر تشکیل شده است. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ارزش درستی ترکیب دو شرطی:

ترکیب دو شرطی هنگامی درست است که هر دو مولفه هم ارزش باشند. اگر یکی از مولفه ها نادرست باشد ، ارزش ترکیب دو شرطی نادرست است.

مجموعه ها:

مجموعه:

مجموعه مرجع:

مجموعه تهی:

زیر مجموعه:

تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه:

تمرین - یک مجموعه ۳ عضوی چند زیر مجموعه دارد؟ یک مثال بزنید.

زیر مجموعه های سره:

مجموعه توانی یک مجموعه:

تعداد زیر مجموعه های k عضوی از یک مجموعه n عضوی :

تمرین - یک مجموعه ۵ عضوی چند زیر مجموعه ۲ عضوی دارد؟ یک مثال بزنید.

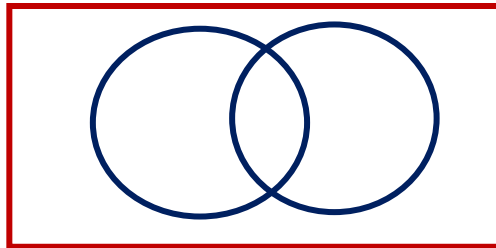
متمم یک مجموعه:

تفاضل دو مجموعه $(A - B)$:

تفاضل متقارن دو مجموعه $(A \Delta B)$:

$$-B) \cup (B - A) \Rightarrow$$

$$A \Delta B = (A$$



جبر مجموعه ها - طرف دوم تساوی های زیر را بنویسید.

$$۱) U' = \quad ۲) \emptyset' = \quad ۳) U \cup A = \quad ۴) U \cap A = \quad ۵) \emptyset \cup A = \quad ۶) \emptyset \cap A =$$

$$۷) A \cup A' = \quad ۸) A \cap A' =$$

$$۹) A \cup B = \quad (\text{تعویض پذیری اجتماع}) \quad ۱۰) A \cap B = \quad (\text{تعویض پذیری اشتراک})$$

$$۱۱) A \cup (A \cap C) = \quad (\text{شرکت پذیری اجتماع})$$

$$۱۲) A \cap (B \cap C) = \quad (\text{شرکت پذیری اشتراک})$$

$$۱۳) A \cup (B \cap C) = \quad (\text{توزیع پذیری اجتماع نسبت به اشتراک})$$

$$۱۴) A \cap (A \cup C) = \quad (\text{توزیع پذیری اشتراک نسبت به اجتماع})$$

دو مجموعه ناسازگار (مجزا - جدا از هم):

تعداد عضوی $A \cup B$:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

الف - دو مجموعه ناسازگار:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - (A \cap B)$$

ب - در حالت کلی:

تمرین

۱ \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

(الف) $A = [-2, 3]$ (ب) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ (پ) $C = (0, +\infty)$ (ت) $D = (-\infty, 1]$

۲ \mathbb{N} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

۳ اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

۴ فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 100$.

$n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ مطلوب است:

(الف) $n(A \cup B)$ (ب) $n(A \cap B')$ (پ) $n(A' \cap B)$ (ت) $n(A' \cap B')$

۵ در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو

گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

۶ در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر

آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید

کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید

کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

تمرین و تست مجموعه ها

- ۱- کدام زیر مجموعه از اعداد طبیعی با بیان توصیفی، تهی است؟
 (۱) زوج بین ۹ و ۱۱ (۲) فرد بین ۸ و ۱۳ (۳) مضرب ۳ بین ۱۳ و ۱۵ (۴) مضرب ۳ بین ۱۴ و ۱۶
- ۲- اگر $A \subset B$ و $C' \subset B'$ آنگاه:
 (۱) $A \subset C$ (۲) $B \subset A$ (۳) $C \subset A$ (۴) $C \subset B$
- ۳- با فرض $A = \{a, \{7, 11\}, \{1, 6\}\}$ کدام گزاره درست است؟
 (۱) $n(A) = 5$ (۲) $\{1, 6\} \subset A$ (۳) $7 \in A$ (۴) $\{a\} \subset A$
- ۴- با توجه به مجموعه‌ی A ، چند رابطه از رابطه‌های زیر درست می‌باشد؟
 $A = \{\{\{a\}, \{\emptyset\}, a\}\}$
 (الف) $a \in A$ (ب) $\emptyset \subset A$ (ج) $\{\{a\}\} \subset A$ (د) $\{\emptyset\} \in A$
 (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۵- اگر $\{2a, 2a - b\} = \{2\}$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟
 (۱) $a + b = 1$ (۲) $a + b = 2$ (۳) $a + b = 3$ (۴) $a + b = 4$
- ۶- اگر $A = \{1, 2, 3, \dots, 25\}$ و $B = \{x | x = 3k - 2, k \in A\}$ و $B \subset A$ باشد مجموعه‌ی B چند عضو دارد؟
 (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱
- ۷- اگر $A = \{x^3 = x\}$ باشد تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه $A - N$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸
- ۸- با توجه به شکل روبه‌رو هر کدام از احکام زیر که درست است با نماد $\sqrt{\quad}$ و هر کدام نادرست است با نماد \times مشخص کنید.
 $g \notin B, k \notin B, h \notin B, c \in A, e \in A, d \in B, e \notin B, d \notin B$
- 
- ۹- تمام زیرمجموعه‌های $A = \{1, 2, 3, 4\}$ را بنویسید. A چند زیرمجموعه دارد؟
- ۱۰- تعداد همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه 2^5 است. این مجموعه چند عضو دارد؟
- ۱۱- x و y را به گونه‌ای بیابید که مجموعه‌های $E = \{2x + 3y + 7\}$ و $F = \{3x - 2y + 9\}$ با هم مساوی شوند.
- ۱۲- تمام زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی $\{\sqrt{2} و a و \{0\}\}$ را بنویسید.
- ۱۳- تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی $2k$ عضوی، ۳۲ برابر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی k عضوی است. k را بیابید.
- ۱۴- مجموع تعداد زیر مجموعه‌های دو مجموعه $K + 5$ و $K + 3$ عضوی از مجموع تعداد زیر مجموعه‌های دو مجموعه $K + 1$ و $K + 2$ عضوی ۲۱۷۶ زیر مجموعه بیشتر است. K را تعیین کنید.

۱۵- اگر دو مجموعه $A = \{x^X \mid x \in Z\}$ و $B = \{y^Y \mid y \in Z\}$ مساوی باشند، مقادیر X و Y را حساب کنید.

۱۶- هرگاه N, E, O, P به ترتیب نمایش مجموعه‌های اعداد طبیعی، اعداد زوج مثبت، اعداد فرد مثبت و اعداد اول باشند، کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

$E \subset N, E \subset O, P \subset E, P \subset N, \phi \subset P, O \subset N$

۱۷- تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{\}\}$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

۱۸- تساوی مجموعه‌ها:

تعریف: دو مجموعه‌ی A و B را مساوی می‌گوئیم، هرگاه هر عضو A ، عضوی از B باشد و هر عضو B نیز عضوی از A باشد. در این صورت می‌نویسیم: $A = B$

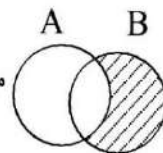
مثال: مقدار a را چنان بیابید که دو مجموعه‌ی $\{1, a, 2\}$ و $\{2a-3, 2, 1\}$ برابر باشند.

$\{2a-3, 2, 1\} = \{1, a, 2\} \Rightarrow 2a-3 = a \Rightarrow a = 3$

توجه: با جابه‌جایی ترتیب اعضای یک مجموعه، مجموعه‌ی جدید حاصل نمی‌شود.

نکته: عضوهای تکراری در مجموعه‌ها یک عضو به حساب می‌آیند. بنابراین: $\{2, 5, 5\} = \{2, 5\}$

اگر مجموعه‌ی A یا B دارای عضوی باشند که در دیگری نباشد، آن‌گاه دو مجموعه با هم مساوی نیستند. $A \neq B$



۱۹- قسمت هاشورزده‌ی شکل: مربوط به کدام گزینه است؟

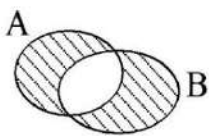
- (۱) $A - B$ (۲) $A' \cap B$ (۳) $A \cap B'$ (۴) $A' \cup B$

۲۰- مجموعه‌ی $A \cup (B - A)$ برابر کدام است؟

- (۱) A (۲) \emptyset (۳) $A \cap B$ (۴) $A \cup B$

۲۱- اگر $B \subset A$ باشد حاصل $(B - A) \cup A$ برابر کدام مجموعه است؟

- (۱) B (۲) A (۳) $A \cup B$ (۴) $A \cap B$



۲۲- در شکل مقابل مجموعه سایه زده از دو مجموعه A و B با کدام مجموعه برابر نیست؟

- (۱) $(A \cup B)' \cap (B \cup A')$ (۲) $(A \cap B') \cup (B \cap A')$
(۳) $(A - B) \cup (B - A)$ (۴) $(A \cup B) - (A \cap B)$

۲۳- متمم مجموعه $[A \cup (A - B)]$ کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) A' (۴) B'

۲۴- اگر $B \subset A$ باشد، حاصل مجموعه $[(B - A) - (B - C)]$ کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) \emptyset (۴) M

۲۵- اگر $A \cap B = A$ باشد، آنگاه کدام تساوی همواره صحیح است؟

- $A = \emptyset$ (۴) $A \cup B = B$ (۳) $A - B = A$ (۲) $B = \emptyset$ (۱)

۲۶- حاصل $A \cup [(A \cap B) \cap (A - B)]$ کدام است؟

- $A \cap B$ (۴) $A \cup B$ (۳) A (۲) \emptyset (۱)



۲۷- قسمت هاشور خورده‌ی شکل مقابل کدام یک از مجموعه‌های زیر را نشان می‌دهد؟

- $(A \cup B) \cap C$ (۲) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ (۱)
 $A \cup (B - C)$ (۴) $(A \cup B) - C$ (۳)

۲۸- اگر $A \subset B$ باشد حاصل $A \cup (B - A)$ برابر کدام گزینه است؟

- A (۴) B (۳) A' (۲) B' (۱)

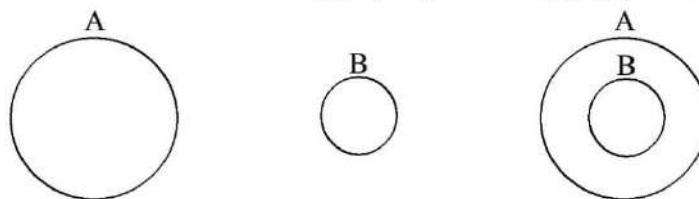
۲۹- اگر M مجموعه‌ی مرجع و A زیرمجموعه‌ای از آن باشد، حاصل عبارت $[(A' - M)' - A]'$ کدام است؟

- \emptyset (۴) M (۳) A' (۲) A (۱)

۳۰- حاصل مجموعه‌ی $(A \cap B') \cap (B - A)$ برابر کدام است؟

- \emptyset (۴) $A \cap B$ (۳) B (۲) A (۱)

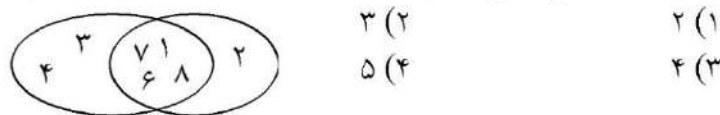
۳۱- در شکل‌های زیر $A \cup B$ را سایه بزنید.



۳۲- اگر $E \cup F = F$ دو مجموعه‌ی E و F نسبت به هم چگونه‌اند؟

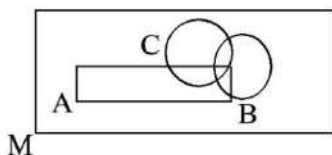
۳۳- آیا همیشه $B \subset A \cup B$ ؟ چرا؟

۳۴- با توجه به شکل مقابل مجموعه‌ی $(A - B) \cup (B - A)$ چند عضو دارد؟



۳۵- عبارت زیر را ساده کنید.

$$[(A \cap M') \cup A \cap \emptyset] \cap [(B \cup B') \cap A]$$



۳۶- با استفاده از نمودار ون در شکل مقابل:

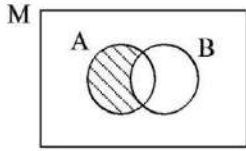
اولاً: حاصل عبارت $(A' \cap C) \cup A$ را به دست آورید.

ثانیاً: درستی تساوی $(A \cap B) - C = A \cap (B - C)$ را بررسی کنید.

۳۷- اگر $A_n = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n} \right\}$ طرف دوم تساوی‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\bigcup_{i=1}^{100} A_i$

ب) $\bigcap_{i=1}^{100} A_i$



۳۸- در شکل مقابل، قسمت هاشور زده برابر کدام مجموعه نمی‌باشد؟

(۱) $A - B$

(۲) $(A \cup B) - B$

(۳) $B' \cap A$

(۴) $A - B'$

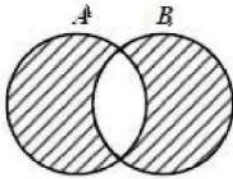
۳۹- در شکل مقابل ناحیه‌ی هاشور خورده متناظر کدام مجموعه نمی‌باشد؟

(۱) $(A - B) \cup (B - A)$

(۲) $(A \cup B) - (B \cap A)$

(۳) گزینه‌ی ۱ و ۲

(۴) $(A \cup B) - A$



۴۰- در یک کلاس ۳۶ نفری ۱۲ نفر عضو تیم والیبال و ۲۴ نفر عضو تیم فوتبال هستند و ۶ نفر عضو هیچ‌کدام از دو تیم نیستند. تعداد دانش‌آموزانی که هم در تیم والیبال و هم در تیم فوتبال هستند چند نفر است؟

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۰

۴۱- از یک کلاس ۲۳ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۳ نفر عضو تیم والیبال بوده، «چند نفر»، فقط عضو تیم والیبال هستند؟

(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۸

(۴) ۱۰

۴۲- در یک کلاس ۳۷ نفری، ۱۵ نفر طرفدار تیم A و ۲۱ نفر طرفدار تیم B هستند و ۶ نفر به هیچ‌کدام از دو تیم A و B علاقه‌ای ندارند. چند نفر فقط طرفدار تیم A هستند؟

(۱) ۱۰

(۲) ۱۳

(۳) ۱۱

(۴) ۱۵

۴۳- اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ باشد، آن‌گاه چه تعداد از رابطه‌های زیر درست‌اند؟

الف) $\{\{\emptyset\}\} \subset A$

ب) $\{\{\emptyset\}\} \in A$

ت) $\{\emptyset\} \subset A$

پ) $\emptyset \subset A$

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۴۴- کارمندان یک اداره ۳۶ نفر هستند. ۴ نفر آن‌ها به تعطیلات نرفته‌اند و بقیه‌ی آن‌ها برای تعطیلات به اصفهان یا شیراز مسافرت کرده‌اند. به این ترتیب که ۲۱ نفر آن‌ها به اصفهان مسافرت کرده‌اند و ۶ نفر آن‌ها، هم به اصفهان و هم به شیراز سفر کرده‌اند. چند نفر آنان فقط به شیراز مسافرت کرده‌اند؟

(۱) ۵

(۲) ۷

(۳) ۱۵

(۴) ۱۱

۴۵- در یک کلاس ۳۰ نفره، ۲ نفر غایب هستند. از حاضرین امتحان‌های ادبیات و ریاضی گرفته شد. پس از تصحیح ورقه‌ها معلوم شد ۵ نفر در امتحان ادبیات و ۸ نفر در امتحان ریاضی نمره‌ی کم‌تر از ۱۰ گرفته‌اند. اگر ۱۸ نفر در هر دو امتحان نمره‌ی ۱۰ و یا بالاتر از ۱۰ گرفته باشند. چند نفر در هر دو امتحان نمره‌ی کم‌تر از ۱۰ گرفته‌اند؟

(۱) ۸ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۲

۴۶- اجتماع دو مجموعه‌ی A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌ی اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی جدید، کدام است؟

(۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۶

۴۷- کدام عبارت درست است؟

- (۱) اجتماع دو مجموعه‌ی نامتناهی، همواره مجموعه‌ای نامتناهی است.
- (۲) اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، همواره مجموعه‌ای نامتناهی است.
- (۳) تفاضل دو مجموعه‌ی نامتناهی، همواره مجموعه‌ای متناهی است.
- (۴) تفاضل دو مجموعه‌ی نامتناهی، همواره مجموعه‌ای نامتناهی است.

۴۸- اگر A و B دو زیر مجموعه از اعداد حسابی، A متناهی و B' نامتناهی باشد، آنگاه کدام مجموعه حتماً متناهی است؟

(۱) $A' \cap B$ (۲) $A \cup B'$ (۳) $A' \cup B'$ (۴) $B' - A$

۴۹- کدام یک از مجموعه‌های زیر با پایان و کدام یک بی‌پایان است؟

- مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد.
- مجموعه‌ی اعداد صحیح زوج.
- مجموعه‌ی اعداد اول زوج.

۵۰- اگر B مجموعه‌ای بی‌پایان باشد و $B \subset A$ آیا A بی‌پایان است؟

۵۱- اگر A و B با پایان باشند آیا اجتماع و اشتراک آن‌ها با پایان است؟

۵۲- اگر A مجموعه با پایان و B مجموعه بی‌پایان باشد، مجموعه $A - B$ چگونه است؟

(۱) با پایان (۲) بی‌پایان (۳) تهی (۴) غیر قابل تعریف

۵۳- فرض کنید A یک مجموعه و $p(A)$ مجموعه‌ی توانی A باشد. کدام رابطه ممکن است درست نباشد؟

(۱) $A \in P(A)$ (۲) $A \subset P(A)$ (۳) $\phi \in P(A)$ (۴) $\phi \subset P(A)$

۵۴- اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $p(A)$ نشانگر مجموعه‌ی توانی A باشد آنگاه $p(p(A))$ چند برابر $p(A)$ می‌باشد؟

(۱) ۴ (۲) ۱۲ (۳) 2^{12} (۴) 2^4

۵۵- اگر $P(A)$ نمایش‌گر مجموعه‌ی توانی A بوده و $P(P(A))$ دارای ۲۵۶ عضو باشد، آنگاه مجموعه‌ی A دارای چند عضو می‌باشد؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۵۶- اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\}$ آنگاه مجموعه‌ی توانی A چند زیر مجموعه دارد؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۱۲۸ (۳) ۲۵۶ (۴) ۵۱۲

۵۷- A مجموعه‌ای ۴ عضوی است. مجموعه‌ی توانی A دارای چند زیر مجموعه است؟

- (۱) 2^4 (۲) 2^8 (۳) 2^{16} (۴) 2^{32}

۵۸- اگر تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی توانی A ، 2^{12} برابر تعداد زیرمجموعه‌های خود مجموعه‌ی A باشد، آنگاه مجموعه‌ی A دارای چند عضو است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۵۹- مجموعه توانی مجموعه $A = \{a, b, \{a, b\}\}$ را بنویسید.

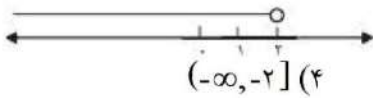
۶۰- اگر به تعداد زیرمجموعه‌های سره یک مجموعه‌ی $2n$ عضوی ۵ واحد اضافه کنیم، حاصل برابر تعداد اعضای مجموعه‌ی توانی مجموعه‌ی A خواهد بود، مطلوبست n .

۶۱- درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.

بازه‌ی $[2, 2]$ برابر است با مجموعه‌ی $\{2\}$.

۶۲- به ازای چند مقدار طبیعی n ، عدد $\frac{3}{8}$ در بازه‌ی $\left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right]$ قرار دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۶۳- کدام یک از موارد زیر بازه‌ی نمایش داده شده محور را بیان می‌کند؟

- (۱) $(2, +\infty)$ (۲) $(-\infty, 2]$ (۳) $(-\infty, 2)$ (۴) $(-\infty, -2]$

۶۴- کدام یک از بازه‌های زیر فقط با دو بازه از بین بازه‌های $(1, 4)$ ، $(-2, 3)$ ، $(-1, 5)$ اشتراک دارد؟

- (۱) $(2, 6)$ (۲) $(0, 2)$ (۳) $(-3, 0)$ (۴) $(-4, -1)$

۶۵- اگر $A = [-2, 2]$ ، $B = (-1, 3]$ و $C = \mathbb{R} - [-3, 1)$ باشد، بازه‌ی $C - (A \cup B)$ کدام گزینه است؟

- (۱) $\mathbb{R} - (-3, 3)$ (۲) $\mathbb{R} - [-3, 3]$ (۳) $[-3, 3]$ (۴) $(-3, 3)$

۶۶- فرض کنید مجموعه‌ی مرجع \mathbb{R} باشد، اگر $A = (-\infty, 0]$ و $B = [-1, 4]$ باشد:

الف) بازه‌ی $A \cup B$ را مشخص کنید:

ب) بازه‌ی $(A \cup B)'$ را مشخص کنید:

۶۷- فرض کنید $A = \{2 + x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \notin (-1, 0)\}$

الف) مجموعه‌ی A را مشخص کنید:

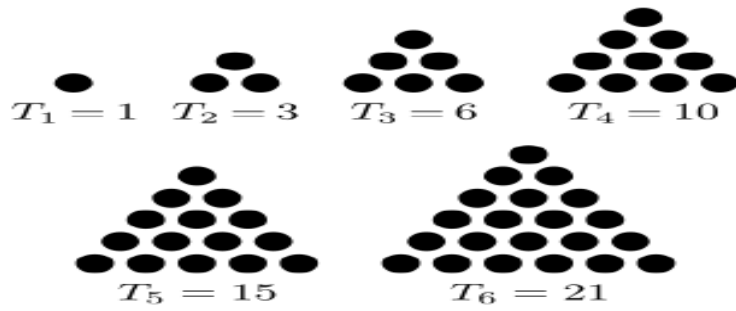
ب) مجموعه‌ی A' را به دست آورید:

۶۸- اگر A بازه‌ی متناظر با مجموعه‌ی جواب نامعادله‌های $3x + 2 < 3x + 1 < 2x + 2$ باشد و $B = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

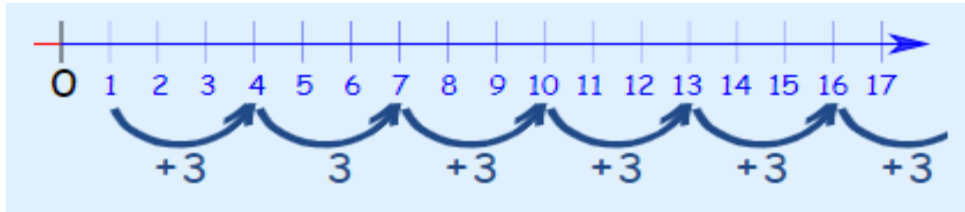
باشد، آنگاه حاصل $A \cap B'$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(0, 1]$ (۳) $(-1, 0]$ (۴) $[-1, 3]$

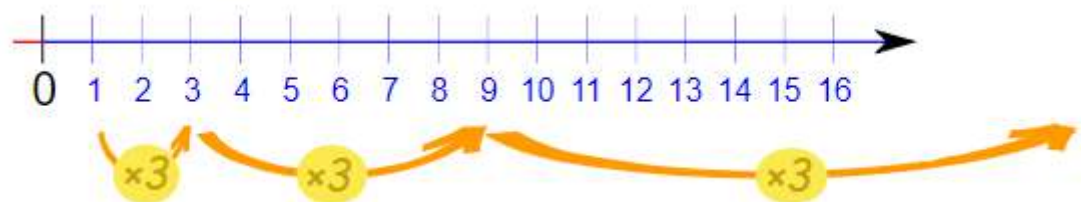
دنبالہ ہا



تصاعد حسابی



تصاعد هندسی



الگوی خطی:

دنباله:

تمرین

۱ به الگوی روبه‌رو توجه کنید.

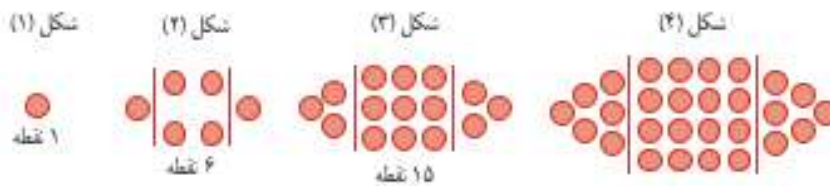


الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره آن را مشخص کنید.

ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.

پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.ت) برای 100 کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل 50 کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چند است؟

۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

۳ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی

نظیر کنید.

(الف) $a_n = 4n$ (ب) $b_n = 3n + 1$ (پ) $c_n = n^2 + 2$ (ت) $d_n = n^2 + n$

۴ برای هر یک از دنباله‌های درجه دو زیر جمله عمومی را به دست آورید و سپس برای هر کدام، یک الگوی هندسی نظیر کنید.

(الف) $5, 8, 13, 20, 29, \dots$ (ب) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$

دنباله حسابی:

جمله عمومی دنباله حسابی:

واسطه حسابی (عددی) بین دو عدد a و c : عدد b واسطه حسابی بین دو عدد a و c است اگر :

$$b = \frac{a+c}{2}$$

چند فرمول مهم در تصاعد عددی:

$$1) d = \frac{t_m - t_n}{m - n} \quad \begin{cases} \text{جمله } m \text{ ام } t_m \\ \text{جمله } n \text{ ام } t_n \end{cases} \quad 2) m + n = p + q \Rightarrow t_m + t_n = t_p + t_q$$

درج m واسطه حسابی بین دو عدد: در این حالت « $m + 2$ » جمله داریم به طوری که یکی از جمله های داده شده را جمله اول و دیگری را جمله « $m + 2$ » فرض می نماییم. با تعیین قدرنسبت واسطه ها را به دست می آوریم. تمرین - بین دو عدد ۵ و ۲۰ چهار واسطه حسابی درج کنید.

تمرین

۱ از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

الف) $3, 10, 17, 24, \dots$

ب) $1, 2, 4, 8, \dots$

ب) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$

ت) $10, 7, 4, 1, \dots$

ت) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$

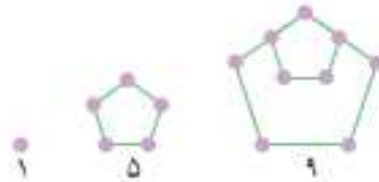
ج) $2, 2, 2, 2, \dots$

۲ در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب 2^0 و 5^6 است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

۳ در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

۴ الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.
ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.

ب) جمله جنم این دنباله ۳۹۷ است؟



۵ الف) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

ب) واسطه حسابی بین 2^0 و 3^0 چه عددی است؟

ب) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶ مسئله زیر در بایروس را بند آمده است. آن را حل کنید.

«۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.»

دنباله هندسی:

جمله عمومی دنباله هندسی:

واسطه هندسی بین دو عدد a و c : عدد b واسطه هندسی بین دو عدد a و c است اگر $b^2 = ac$

چند فرمول مهم در تصاعد هندسی:

$$\begin{cases} \text{جمله } m\text{ام} & t_m \\ \text{جمله } n\text{ام} & t_n \end{cases} \quad 1) r = \pm \sqrt[m-n]{\frac{t_m}{t_n}} \quad (m - n = \text{زوج})$$

$$2) r = \sqrt[m-n]{\frac{t_m}{t_n}} \quad (m - n = \text{فرد})$$

$$3) m + n = p + q \Rightarrow t_m \cdot t_n = t_p \cdot t_q$$

درج m واسطه هندسی بین دو عدد: در این حالت « $m + 2$ » جمله داریم به طوری که یکی از جمله های داده شده را جمله اول و دیگری را جمله « $m + 2$ » فرض می نماییم. با تعیین قدرنسبت واسطه ها را به دست می آوریم. تمرین - بین دو عدد ۲ و ۳۲ سه واسطه هندسی درج کنید.

۱) از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

الف) $۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸, \dots$

ب) $۲\sqrt{5}, ۴\sqrt{5}, ۶\sqrt{5}, ۸\sqrt{5}, \dots$

ب) $۱, \frac{-1}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{-1}{۸}, \dots$

ت) $۵, ۵, ۵, ۵, \dots$

۲) چند دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{۴}{۵}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

۳) درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.
الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

۴) علی دو جرعه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دو جرعه دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دو جرعه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دو جرعه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

۵) حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.
 $۲, ۴, ۸, \dots$

۶) جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

۷) بنابر آمار منتشر شده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۷۷۸ نفر در سال ۱۴۰۰ کاهش یافته است که نشان دهنده حدود ۳ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد.

الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۵ چند نفر از هموطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲	۱۴۰۳	۱۴۰۴	۱۴۰۵
تعداد تلفات مورد انتظار						

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟

تمرین و تست دنباله

۱- رابطه $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$ بین جملات یک دنباله همواره برقرار است، اگر $U_1 = U_2 = 1$ باشد، جمله نهم این دنباله کدام است؟

- ۳۲ (۴) ۳۳ (۳) ۳۴ (۲) ۳۵ (۱)

۲- با توجه به رابطه بین اعداد دنباله $0, 0, x, 21, 11, 5, 3$ مقدار x کدام است؟

- ۴۳ (۴) ۴۱ (۳) ۳۹ (۲) ۳۷ (۱)

۳- جمله $(2n+1)$ ام یک رشته بر حسب n برابر است با $\frac{2n^2+1}{2n-1}$ مقدار جمله سوم این رشته کدام است؟

- ۵ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

۴- در رابطه بازگشتی $a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{3}{4}$ مقدار a_8 کدام است؟

- $\frac{17}{256}$ (۴) $\frac{15}{256}$ (۳) $\frac{19}{216}$ (۲) $\frac{15}{216}$ (۱)

۵- اگر در یک رشته اعداد جمله عمومی بصورت $5 + n^2 = a_{2n-1}$ باشد، جمله هفتم کدام است؟

- ۳۰ (۴) ۴۱ (۳) ۲۱ (۲) ۵۴ (۱)

۶- جمله بعدی را در دنباله‌ی مقابل بنویسید.

۵, ۱۰, ۱۷, ۲۶, ۳۷,

۷- جمله بعدی را در دنباله‌ی مقابل بنویسید.

۱, ۲, ۶, ۲۴, ۱۲۰,

۸- جمله بعدی را در دنباله‌ی مقابل بنویسید.

$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \dots$

۹- جمله عمومی دنباله‌ی $1 - 2n = l_n$ است. اگر این دنباله در N_0 تعریف شده باشد آن را به صورت نقاطی از صفحه‌ی مختصات نمایش دهید.

۱۰- آیا دنباله‌ی زیر یک تصاعد عددی است؟ قدر نسبت آن را حساب کنید.

۱۱, ۱۷, ۲۲, ...

۱۱- به ازای کدام مقدار a اعداد $9a - 3$, $4a + 1$ و $a + 4$ جملات متوالی یک دنباله عددی‌اند؟

- $\frac{1}{4}$ (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) ۲ (۴)

۱۲- کدام دسته از اعداد زیر تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند؟

- $\frac{3}{5}, \frac{9}{5}, \frac{27}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}$ (۳) $\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}$ (۲) $\sqrt{5}, 1, \frac{1}{\sqrt{5}}$ (۱)

۱۳- جمله هفتم در یک دنباله حسابی ۲۰ و جمله پانزدهم آن ۳۰ است قدر نسبت کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{5}{3}$

۱۴- اگر جمله دوازدهم یک دنباله حسابی با قدر نسبت ۲ برابر ۳۴ باشد جمله هیجدهم آن کدام است؟

- (۱) ۴۶ (۲) ۴۸ (۳) ۵۰ (۴) ۵۲

۱۵- اگر در یک دنباله عددی جمله اول آن ۲ و قدر نسبت آن ۴ باشد، جمله یازدهم این دنباله چند برابر جمله اول آن است؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۴۲

۱۶- در دنباله حسابی $\dots, \frac{7}{3}, 2$ جمله چندم برابر ۶ است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

۱۷- جمله هفتم یک دنباله عددی ۱۵ و جمله نهم آن ۱۹ است. جمله دوازدهم کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۵ (۳) ۲۷ (۴) ۲۹

۱۸- بین دو عدد ۲ و ۱۲ سه عدد قرار داده‌ایم که با این دو عدد تشکیل تصاعد حسابی بدهد جمله هفتم این تصاعد کدام است؟ (۲، جمله اول است)

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) $14/5$ (۴) $15/5$

۱۹- جمله پانزدهم دنباله‌ی $\dots, 6, 2, -2$ کدام است؟

- (۱) ۵۲ (۲) ۵۴ (۳) ۵۶ (۴) ۵۸

۲۰- در دنباله (رشته) اعداد $\dots, 0, x, 12$ بجای عدد x کدام مقدار قرار می‌گیرد تا حاصل یک دنباله حسابی گردد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۲۱- در یک دنباله حسابی $a_{11} - a_7 = 12$ قدر نسبت کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) +۲ (۴) +۳

۲۲- بین اعداد ۱۲- و ۵۲ سه واسطه حسابی درج کرده‌ایم. مجموع این سه واسطه حسابی چقدر است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۶۴ (۳) ۶۸ (۴) ۷۲

۲۳- چندمین جمله از دنباله $\dots, 8, 5, 2$ برابر با ۵۶ است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

۲۴- در یک دنباله حسابی $t_n = m$ و $t_m = n$ و $n \neq m$. قدر نسبت دنباله کدام است؟

- (۱) $n - m$ (۲) -۱ (۳) $m - n$ (۴) ۱

۲۵- چند عدد سه‌رقمی مضرب ۱۵ وجود دارد؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۶۱ (۳) ۵۹ (۴) ۳۰

۲۶- در یک دنباله عددی $a_7 - a_6 = 4$ ، مقدار عددی $a_7 - a_1$ چقدر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) -۸

۲۷- بین دو عدد که تفاضل آنها ۸۴۰ است پنج واسطه عددی درج شده. قدر نسبت دنباله چقدر است؟

- (۱) ۲۱۰ (۲) ۱۶۸ (۳) ۱۶۰ (۴) ۱۴۰

۲۸- بین دو عدد ۳ و ۱۹ چند واسطه حسابی با قدر نسبت ۴ می‌توان درج کرد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۹- مقادیر k و k' و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ ، چهار جمله متوالی یک دنباله عددی هستند، در این صورت:

- (۱) $k + k' = 0$ (۲) $k + k' = \frac{1}{12}$ (۳) $k + k' = \frac{1}{4}$ (۴) $k + k' = \frac{1}{6}$

۳۰- برای درج ۱۱ واسطه حسابی بین اعداد ۸ و ۵۰، «قدر نسبت» چه عددی باید باشد؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) ۳

۳۱- به جملات اول و دوم دنباله حسابی ۴ واحد افزوده و دنباله حسابی دیگری تشکیل می‌دهیم. اختلاف جملات n ام دو دنباله چقدر است؟

- (۱) $2n + 2$ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) $2n$

۳۲- در دنباله حسابی $\dots, y, 35, x, 125, y$ عدد y کدام است؟

- (۱) -۱۰ (۲) -۵ (۳) ۰ (۴) ۵

۳۳- واسطه‌ی عددی بین دو عدد $1 + \sqrt{3}$ و $\frac{2}{1 - \sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۳۴- جمله اول و سوم و پنجم یک دنباله عددی به ترتیب $2x, x + 1, x - 2$ می‌باشند. جمله دوم دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{2}$ (۲) $\frac{13}{2}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{15}{2}$

۳۵- جمله‌ی پنجم یک دنباله حسابی، دو برابر جمله‌ی هفتم آن است. جمله‌ی نهم آن کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) ۱

۳۶- جمله اول یک دنباله حسابی ۲۷ و قدرنسبت آن $\frac{3}{4}$ - است. چه تعداد از جملات این دنباله مثبت است؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰

۳۷- اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تشکیل دنباله عددی بدهند، وتر این مثلث چند برابر مجموع دو ضلع دیگر مثلث است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۳۸- در یک دنباله هندسی جمله‌ی سوم ۲ برابر جمله‌ی اول است، جمله‌ی نهم چند برابر جمله‌ی اول است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴) ۱۶

۳۹- کدام دسته اعداد ۴ جمله متوالی از دنباله‌ی هندسی‌اند؟

- (۱) ۹, ۳, ۱, $\frac{2}{3}$ (۲) ۱۲, ۹, ۶, ۴ (۳) ۱۳, ۹, ۶, ۴ (۴) ۸, ۱۲, ۱۸, ۲۷

۴۰- در یک دنباله هندسی تفاضل دو جمله پنجم و سوم $\frac{1}{33}$ است. اگر قدرنسبت برابر $\frac{1}{3}$ باشد، جمله اول کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۴۱- اگر جملات پنجم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۸ و ۱۶ باشد، جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۶۴ (۳) ۱۲۸ (۴) ۲۵۶

۴۲- در یک دنباله هندسی جمله چهارم ۲۴ و جمله هفتم ۱۹۲ است، جمله اول کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۳- واسطه هندسی بین جمله هشتم و چهاردهم دنباله ۰۰۰, ۱۲, ۸, ۴ کدام است؟

- (۱) $16\sqrt{7}$ (۲) $32\sqrt{7}$ (۳) ۴۴ (۴) ۵۶

۴۴- جمله عمومی یک دنباله هندسی $\frac{2}{(3 \times 2^n)}$ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۴۵- واسطه هندسی بین اعداد $\frac{1}{16}$ و $\frac{1}{4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{5}{16}$ (۴) $\frac{5}{32}$

۴۶- در یک دنباله هندسی جمله دوم هشت برابر جمله پنجم است قدر نسبت دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۷- واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $2^3 \times 5 \times 7^2$ و $2^3 \times 5^3 \times 11^2$ کدام است؟

- (۱) ۷۷۰۰ (۲) ۷۸۰۰ (۳) ۸۵۰۰ (۴) ۸۷۰۰

۴۸- بین اعداد ۸ و $\frac{81}{3}$ سه واسطه هندسی درج کرده‌ایم، جمله دوم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۴۹- در یک دنباله حسابی جملات اول و نهم و چهل و نهم به ترتیب جملاتی متوالی از یک دنباله هندسی هستند، قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۰- جمله پنجم یک دنباله هندسی ۸ برابر جمله هشتم آن است. قدر نسبت دنباله کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۵۱- مجموع دو عدد ۱۵۰ و واسطه هندسی آن دو ۲۱ + بوده، عدد کوچکتر چند است؟

- (۱) ۱۰۸ (۲) ۵۴ (۳) ۳۳ (۴) ۳

۵۲- در یک دنباله هندسی تفاضل جمله چهارم و دوم $l_4 - l_2 = 6$ و قدر نسبت دنباله $\sqrt{3}$ است. جمله اول چقدر است؟

- (۱) ۴ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۵۳- در یک دنباله هندسی جمله دوم شش و جمله پنجم چهار برابر جمله سوم است، جمله اول چقدر است؟

- (۱) $\pm \frac{1}{3}$ (۲) فقط ۳ (۳) فقط ۳ - (۴) ± 3

۵۴- بین $\frac{1}{3}$ و ۲۷ سه واسطه هندسی درج شده است. مجموع این سه جمله چقدر است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴) ۹

۵۵- جملات اول و نهم و چهل و نهم از دنباله حسابی می‌توانند جملات متوالی دنباله هندسی باشند، قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

فصل دوم

مثلثات

θ	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-
$\cot \theta$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

نسبت های مثلثاتی:

۱) $\sin x$ سینوس ۲) $\cos x$ کسینوس ۳) $\tan x$ تانژانت ۴) $\cot x$ کوتانژانت

۵) $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ کسکانت

۶) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ سکانت

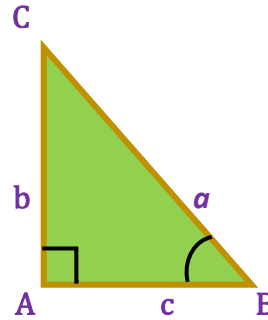
نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه: ($A = 90^\circ$)

۱) $\sin B = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه } B}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$

۲) $\cos B = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه } B}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$

۳) $\tan B = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه } B}{\text{ضلع مجاور به زاویه } B} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$

۴) $\cot B = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه } B}{\text{ضلع مقابل به زاویه } B} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$



نکته - تانژانت و کوتانژانت عکس یک دیگر اند. $\tan x \cdot \cot x = 1$

قضیه - مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.

اثبات:

قضیه - مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.

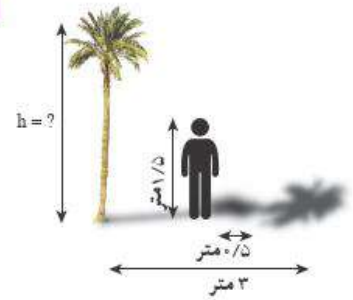
اثبات:

قضیه - مساحت هر چهار ضلعی برابر است با نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه بین آن دو قطر.

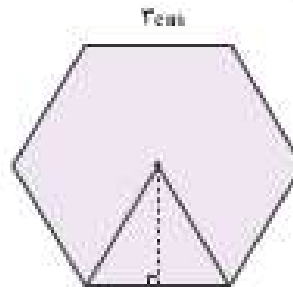
اثبات:

تمرین

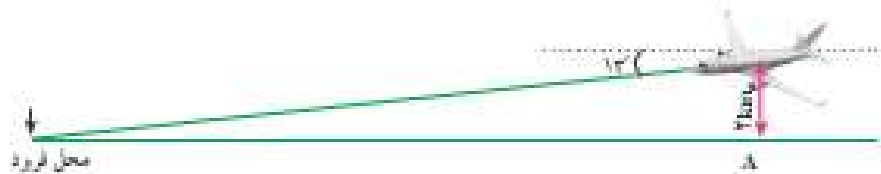
- ۱ علی می خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱/۵ متر و طول سایه او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع درخت چقدر است؟



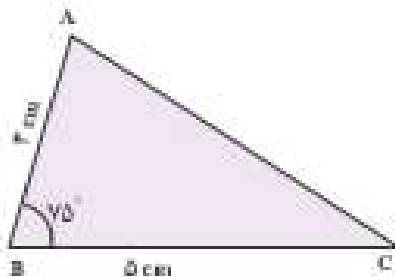
- ۲ مساحت منش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



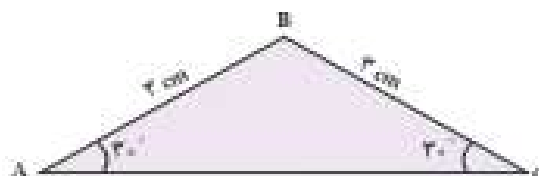
- ۳ یک هواپیما در ارتفاع ۲ km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می آید.
 $\tan 13^\circ = 0.23$



- ۴ فرض کنید $\sin 75^\circ = 0.96$ مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



- ۵ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



دایره مثلثاتی:

دایره مثلثاتی، دایره ای است جهت دار به شعاع واحد که جهت آن مخالف عقربه های ساعت و موافق عقربه های ساعت اختیار شده است.

محورها در دایره مثلثاتی:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

۱- محور کسینوس ها: محور کسینوس ها قطر دایره در راستای افق است. اگر مرکز دایره مثلثاتی منطبق بر مبدا مختصات باشد، حدود تغییرات کسینوس از «-۱» تا «+۱» است.

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

۲- محور سینوس ها: محور سینوس ها قطر دایره در راستای قائم است. اگر مرکز دایره مثلثاتی منطبق بر مبدا مختصات باشد، حدود تغییرات سینوس از «-۱» تا «+۱» است.

$$-\infty < \cot x < +\infty$$

۳- محور کتانژانت ها: محور کتانژانت ها بالای دایره، مماس بر دایره مثلثاتی در راستای افق است.

$$-\infty < \tan x < +\infty$$

اگر نقطه تماس مبدا فرض شود، حدود تغییرات کتانژانت از «-∞» تا «+∞» است.
۴- محور تانژانت ها: محور تانژانت ها سمت راست دایره، مماس بر دایره مثلثاتی در راستای قائم است.
اگر نقطه تماس مبدا فرض شود، حدود تغییرات تانژانت از «-∞» تا «+∞» است.

شیب خط:

$$m = \tan \alpha = \frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

معادله خط با معلوم بودن شیب و یک نقطه:

اگر $(x$ و $y)$ یک نقطه از خط L و m شیب این خط باشد، معادله خط L از رابطه زیر به دست می آید.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مختصات یک نقطه بر حسب سینوس و کسینوس:

اگر $(x$ و $y)$ A و فاصله آن تا مبدا مختصات برابر r باشد، داریم:

$$\begin{cases} y = r \cos \theta \\ x = r \sin \theta \end{cases}$$

نکته- با توجه به قضیه فیثاغورس می توان نوشت: $x^2 + y^2 = r^2$

تمرین

۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

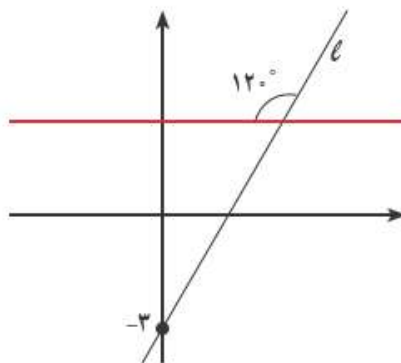
الف) $27^\circ +$ ب) 225° پ) $135^\circ -$ ت) 185°

۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

الف) $\cos \alpha = \frac{3}{7}$ (در ربع چهارم)

ب) $\sin \beta = \frac{-1}{4}$ (در ربع سوم)

- ۳ اگر $\sin\theta$ و $\tan\theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟
- ۴ حدود زاویه θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.
الف) $\sin\theta > 0$, $\cos\theta > 0$ ب) $\sin\theta < 0$, $\cos\theta > 0$
- ۵ اگر $\sin\alpha \times \cos\alpha < 0$ ، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می تواند قرار بگیرد؟ چرا؟
- ۶ زاویه ای مثل α پیدا کنید به طوری که $\tan\alpha > \cot\alpha$. اکنون زاویه ای مثل β پیدا کنید، به طوری که $\cot\beta > \tan\beta$. از این تمرین چه نتیجه ای می گیرید؟
- ۷ در تمرین ۶ به جای تانژانت و کتانژانت به ترتیب سینوس و کسینوس قرار دهید و در مورد آن بحث کنید.
- ۸ معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور x ها 45° است و نقطه $(2, 0)$ روی آن قرار دارد.
- ۹ با توجه به شکل زیر، معادله خط l را به دست آورید.



روابط مثلثاتی:

$$1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2) \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ 3) \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$$

اثبات:

$$4) \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow 5) \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

اثبات:

$$6) \cos^2 x = \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$$

اثبات:

$$7) \csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \Rightarrow 8) \sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x}$$

اثبات:

$$9) \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

اثبات:

چند اتحاد مهم:

$$۱) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

اثبات:

$$۲) \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

اثبات:

$$۳) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

اثبات:

$$۴) \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x + 2\sin^2 x \cos^2 x$$

اثبات:

تمرین - درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$۱) \frac{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}{\operatorname{cotg}^2 x - \cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$$

$$۲) \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$۳) \frac{\sin^2 X \operatorname{tg}^2 X}{1 + \operatorname{tg}^2 X} + \frac{\cos^2 X \operatorname{cotg}^2 X}{1 + \operatorname{cotg}^2 X} = 1 - 3 \sin^2 X \cos^2 X$$

$$۴) \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$$

$$۵) (1 + \operatorname{tga} + \operatorname{cotga}) \left(\frac{1}{\cos a} - \frac{1}{\sin a} \right) = \frac{\sin a}{\cos^2 a} - \frac{\cos a}{\sin^2 a}$$

$$۶) \left(\frac{1}{\sin X} - \sin X \right) \left(\frac{1}{\cos X} - \cos X \right) = \frac{\operatorname{tg} X}{1 + \operatorname{tg}^2 X}$$

$$۷) \frac{\sin^2 X - \cos^2 X}{\cos^2 X} = (tg X + 1)(tg X - 1)$$

$$۸) \frac{1}{\sin^2 X} + \frac{1}{tg^2 X} = 1 + \frac{cotg^2 X}{\sin^2 X}$$

$$۹) \sqrt{\frac{1 - \sin X}{1 + \sin X}} = \frac{1}{\cos X} - tg X$$

$$۱۰) \frac{\operatorname{tg}^2 X}{1 + \operatorname{tg}^2 X} + \frac{\operatorname{cotg}^2 X}{1 + \operatorname{cotg}^2 X} = \frac{1 - \gamma \sin^2 X \cos^2 X}{\sin X \cos X}$$

$$۱۱) \sin^2 X + \cos^2 X + \gamma \sin^2 X \cos^2 X = 1 + \gamma \sin^2 X \cos^2 X$$

$$۱۲) \frac{\sin X + \cos X}{\sin X - \cos X} + \frac{\gamma \cos^2 X - 1}{\cos^2 X (1 - \operatorname{tg}^2 X)} = \frac{\gamma \operatorname{tg} X}{\operatorname{tg} X - 1}$$

$$۱۳) \frac{\sin^2 X - \cos^2 X}{\gamma \sin^2 X - 1} = 1 - \sin^2 X + \sin^2 X$$

$$۱۴) \frac{1}{3}(\cos^6 X + \sin^6 X) - \frac{1}{4}(\cos^2 X - \sin^2 X)^2 = \frac{1}{12}$$

$$۱۵) \cotg^2 X \frac{\sec X - 1}{\sin X + 1} + \sec^2 X \cdot \frac{\sin X - 1}{\sec X + 1} = 0$$

تمرین

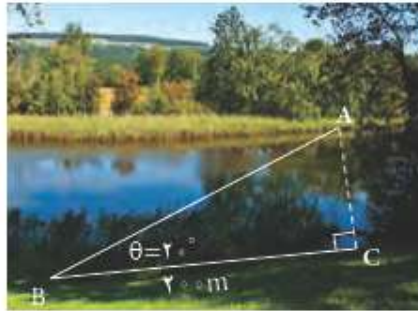
۱ فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

۲ اگر $\tan \alpha = \frac{-4}{3}$ و α زاویه‌ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

۳ اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 135° را به دست آورید.

۴ اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 24° را به دست آورید.

۵ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازه 20° متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطه B برسد. اگر زاویه دید این شخص (از نقطه B به نقطه A)، 2° باشد و $\sin 2^\circ = 0.34$ ، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار بر حسب متر بنویسید.)



۶ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad (\text{الف})$$

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} = \sin x \quad (\text{ت})$$

$$\frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha} = \tan\alpha \quad (\text{پ})$$

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1+\sin x} \quad (\text{ث})$$

تمرین و تست فصل ۲

۱- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، $b = 1$ و $c = 2\sqrt{2}$ مقدار $\sin B$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \quad (1) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (3) \quad \frac{3}{4} \quad (4)$$

۲- در مثلث قائم الزاویه ABC قائمه در رأس C ، مقادیر $a = 1$ و $b = \sqrt{3}$ می باشد. $\cos A$ کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) \quad \sqrt{3} \quad (3) \quad \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

۳- حاصل عبارت مقابل را تعیین کنید:

$$\sin 30^\circ + \cos 45^\circ - \sin 45^\circ$$

۴- حاصل عبارت مقابل را تعیین کنید:

$$\tan 60^\circ - \cot 30^\circ + \tan 45^\circ$$

۵- حاصل عبارت مقابل را تعیین کنید:

$$\tan 180^\circ - \cot 90^\circ - \cot 45^\circ$$

۶- حاصل عبارت مقابل را تعیین کنید:

$$\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ$$

۷- حاصل عبارت مقابل را تعیین کنید:

$$\cos 0^\circ \cos 180^\circ - \sin 0^\circ \sin 180^\circ$$

۸- درستی تساوی مقابل را بررسی کنید.

$$\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} = \tan 30^\circ$$

۹- درستی تساوی مقابل را بررسی کنید.

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$$

۱۰- درستی تساوی مقابل را بررسی کنید.

$$1 - 2\sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$$

۱۱- درستی تساوی مقابل را بررسی کنید.

$$1 + \tan^2 60^\circ = \frac{1}{\cos^2 60^\circ}$$

۱۲- درستی تساوی مقابل را بررسی کنید.

$$1 + \cot^2 45^\circ = \frac{1}{\sin^2 45^\circ}$$

۱۳- درستی تساوی مقابل را بررسی کنید.

$$2\cos^2 30^\circ - 1 = \cos 60^\circ$$

۱۴- درستی تساوی مقابل را بررسی کنید.

$$\frac{1 + \cot 30^\circ \cot 60^\circ}{\cot 30^\circ - \cot 60^\circ} - \cot 30^\circ = 1$$

۱۵- در مسئله‌ی زیر مثلث ABC در رأس C قائم الزاویه فرض شده است با استفاده از مفروضات داده شده آنچه خواسته شده است را به دست آورید:
 $b = 4$, $\angle A = 30^\circ$, $a = ?$

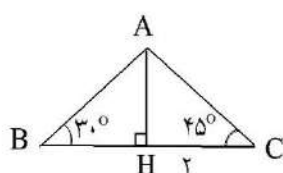
۱۶- در مسئله‌ی زیر مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویه فرض شده است با استفاده از مفروضات داده شده آنچه خواسته شده است را به دست آورید:
 $a = 9$, $\angle B = 45^\circ$, $c = ?$

۱۷- در مسئله‌ی زیر مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویه فرض شده است با استفاده از مفروضات داده شده آنچه خواسته شده است را به دست آورید:
 $a = 5$, $b = 9$, $\sin A = ?$

۱۸- در مسئله‌ی زیر مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویه فرض شده است با استفاده از مفروضات داده شده آنچه خواسته شده است را به دست آورید:

۱۹- اگر $30^\circ < x < 90^\circ$ و $\sin x = m + 1$ باشد، حدود m را بیابید.

۲۰- اگر $60^\circ \leq x < 90^\circ$ و $\cos x = -2m - 1$ باشد، حدود m را بیابید.



۲۱- در شکل مقابل، مقدار BH کدام است؟

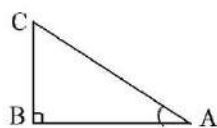
- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۴) $3\sqrt{3}$

۲۲- نردبانی به دیواری تکیه داده شده است. اگر فاصله‌ی سر نردبان از سطح زمین ۱۲ متر و شیب نردبان برابر $\frac{12}{5}$ باشد، طول نردبان کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۲۳- طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۹ سانتی‌متر و سینوس یکی از زاویه‌های آن $\frac{2}{3}$ است. مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) $6\sqrt{5}$ (۲) $9\sqrt{5}$ (۳) $12\sqrt{5}$ (۴) $18\sqrt{5}$

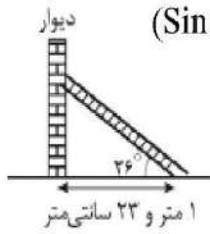


۲۴- در شکل مقابل، $\hat{A} = 30^\circ$ و $BC = 2$ است. $\cos \hat{C}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

۲۵- حاصل $\sin 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ$ برابر است با:

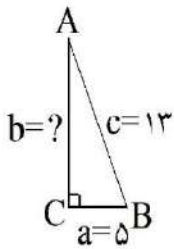
- (۱) $\sin^2 45^\circ$ (۲) $\sqrt{3} \sin^2 45^\circ$ (۳) $2 \cos 30^\circ \operatorname{tg} 30^\circ$ (۴) $\sqrt{3} \cos^2 30^\circ$



۲۶- مطابق شکل رویه‌رو، نردبانی را به دیوار تکیه داده‌ایم. طول نردبان چند متر است؟ $(\sin 54^\circ = 0.82)$

- (۱) ۱/۲۵
- (۲) ۱/۳۰
- (۳) ۱/۴۵
- (۴) ۱/۵۰

۲۷- با توجه به اندازه‌های روی شکل، $\tan B$ را محاسبه نمایید.

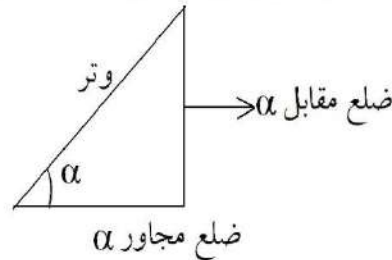


۲۸- اگر در شکل، نسبت‌های $\frac{AB}{AC}$ ، $\frac{A'B''}{A''C''}$ ، $\frac{A'B'}{A'C'}$ را اندازه بگیرید، هر سه با هم برابرند. این نسبت‌ها فقط به اندازه‌ی

زاویه‌ی α بستگی دارند و برابر با $\tan \alpha$ می‌باشند.

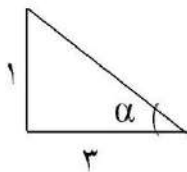
نتیجه: در یک مثلث قائم‌الزاویه که α یک زاویه‌ی حاده‌ی آن باشد، داریم:

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل به } \alpha}{\text{ضلع مجاور به } \alpha}$$



۲۹- مثال ۱: با توجه به شکل مقابل، تانژانت زاویه‌ی α ($\tan \alpha$) را به دست آورید.

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} = \frac{1}{3}$$



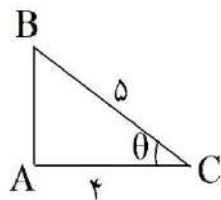
۳۰- مثال ۲: با توجه به شکل مقابل، تانژانت زاویه‌ی θ ($\tan \theta$) را به دست آورید.

مجهول است = ضلع مقابل θ = AB

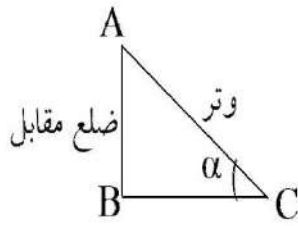
طبق رابطه‌ی فیثاغورس AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 \Rightarrow AB^2 = 9 \rightarrow \boxed{AB = 3}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{ضلع مجاور } \theta} = \frac{3}{4}$$



۳۱- $\sin \alpha$: سینوس α



در شکل مقابل، نسبت $\frac{AB}{AC}$ را سینوس زاویه α می‌نامیم و آن را به صورت $\sin \alpha$ نشان می‌دهیم.

$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

مثال: در مثال ۱ و ۲، $\sin \alpha$ را برای هر شکل محاسبه نمایید.

$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \xrightarrow{\text{گویا می‌کنیم}} \frac{\sqrt{10}}{10}$$

مثال ۱:

$$\text{وتر} = \sqrt{10} \rightarrow 10 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10 \quad (\text{وتر})^2 = 1^2 + 3^2: \text{طبق فیثاغورس}$$

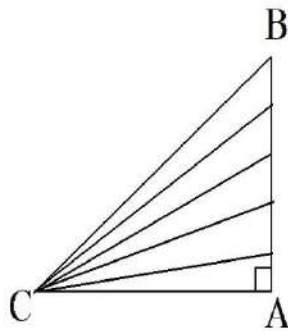
$$\sin \theta = ?$$

$$\text{ضلع مقابل } \theta = 3 \Rightarrow \sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{وتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{وتر} = 5$$

مثال ۲:

۳۲- نکته ۱: هرچه زاویه α کوچک‌تر شود و به صفر نزدیک شود، ضلع روبه‌روی آن هم در مثلث کوچک و نزدیک به صفر می‌شود. بنابراین با توجه به فرمول‌های تانژانت و سینوس آن زاویه نیز به صفر نزدیک می‌شود. پس می‌توان گفت:



$$\sin 0^\circ = 0$$

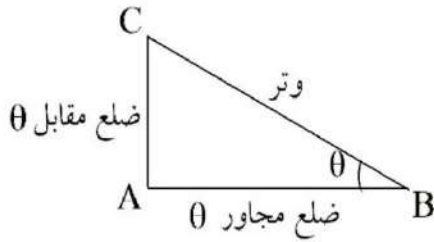
$$\tan 0^\circ = 0$$

نکته ۲: هرچه زاویه α بزرگ‌تر شود تا به 90° نزدیک شود، مقدار $\sin \alpha$ ، $\tan \alpha$ نیز افزایش می‌یابند و می‌توان گفت:

$$\sin 90^\circ = 1$$

نتیجه‌ی مهمی که از نکته‌ی ۲ می‌گیریم: اگر α یک زاویه‌ی حاده باشد، همیشه داریم: $\sin \alpha < 1$

۳۳- $\cos \theta$: کسینوس θ



در شکل مقابل، نسبت $\frac{AB}{BC}$ را کسینوس زاویه θ می‌نامیم و آن را به صورت $\cos \theta$ نشان می‌دهیم. مانند نسبت‌های تانژانت و سینوس، این نسبت نیز فقط به مقدار زاویه θ بستگی دارد.

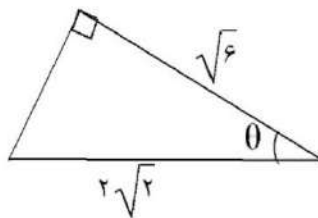
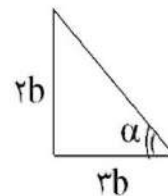
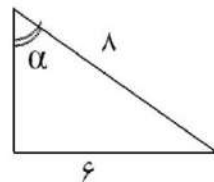
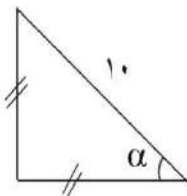
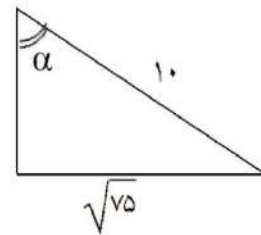
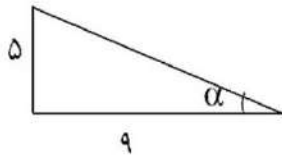
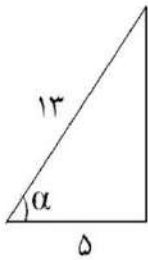
$$\cos \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{وتر}}$$

تذکر: برای نام‌گذاری زاویه‌ی حاده، می‌توانیم از حروف α و β و θ ... استفاده نماییم.
 نکته: هرچه زاویه‌ی حاده کوچک‌تر می‌شود و به صفر نزدیک می‌شود، کسینوس آن به ۱ نزدیک می‌شود و هرچه زاویه بزرگ‌تر و نزدیک به 90° شود، کسینوس آن به صفر نزدیک می‌شود و می‌توانیم بگوییم:
 $\cos 0^\circ = 1$ و $\cos 90^\circ = 0$

تذکر: اگر α یک زاویه‌ی حاده باشد، همیشه داریم: $\cos \alpha < 1$.
 به نسبت‌های تانژانت و سینوس و کسینوس، نسبت‌های مثلثاتی می‌گوییم.

۳۴- خود را بیازمایید.

در هر یک از مثلث‌های زیر، تمامی توابع مثلثاتی را برای زاویه‌ی حاده α به دست آورید.



۳۵- به جدول زیر توجه کنید.

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 45^\circ = 1$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

در جدول بالا یک رابطه‌ی بسیار مهم را نتیجه می‌گیریم:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نتیجه‌ی کلی: هرگاه دو زاویه‌ی α و β متمم یکدیگر باشند، $\alpha + \beta = 90^\circ$. آن‌گاه $\sin \alpha$ و $\cos \beta$ با هم مساوی می‌شوند و بر عکس.

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$\sin \beta = \cos \alpha$$

۳۶- از جدول بالا برای حل بسیاری از مطالب در نسبت‌های مثلثاتی استفاده می‌کنیم.

مثال ۱: حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ =$$

$$\xrightarrow{\text{طبق جدول}} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

مثال ۲: درستی تساوی مقابل را اثبات کنید:

$$1 - 2 \sin^2 30^\circ = 2 - 2 \sin^2 60^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{طرف اول}} 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - 2 \times \frac{1}{4} = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$2 - 2 \sin^2 60^\circ = 2 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2 - 2 \times \frac{3}{4} = 2 - \frac{6}{4} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} - \frac{3}{2} = \frac{4}{2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$(1) = (2)$$

۳۷- اشتباهات خطرناک نکنید.

$$\sin 2\theta \neq 2 \sin \theta \qquad \sin^2 \theta \neq \sin \theta^2$$

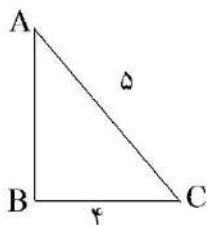
۳۸- با افزایش مقدار یک زاویه‌ی تند، کسینوس آن زاویه می‌یابد.

۳۹- اگر زاویه‌ی تند α به 90° نزدیک شود، $\sin \alpha$ به عدد نزدیک می‌شود.

۴۰- اگر زاویه‌ی حاده‌ی α بزرگ‌تر شود، تانژانت آن می‌شود.

۴۱- با استفاده از مثلث متساوی‌الاضلاع، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی 60° را محاسبه کنید.

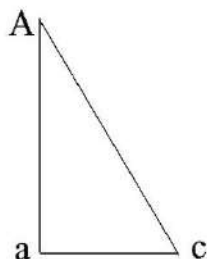
۴۲- در مثلث قائم‌الزاویه زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه رأس A را به دست آورید.



۴۳- مقدار عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \frac{\tan^2(45^\circ) + 5\cos^2(30^\circ)}{\sin^2(45^\circ) + 2\cos(60^\circ)}$$

۴۴- در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو نسبت‌های مثلثاتی زاویه رأس C را به دست آورید.



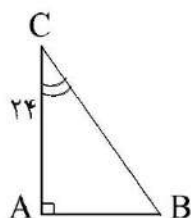
۴۵- طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۰ سانتی‌متر و سینوس یکی از زاویه‌های آن $\frac{3}{5}$ است.

محیط این مثلث چند سانتی‌متر است؟

۴۶- مقدار عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \frac{\cos^2(45^\circ) - 3\sin(30^\circ)}{5\tan^2(45^\circ) + 5\cos(60^\circ)}$$

۴۷- در شکل مقابل، در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ ، $\hat{A} = 90^\circ$ و $AC = 24$ و $\cos C = \frac{4}{5}$ است.



محیط مثلث $\triangle ABC$ ، کدام است؟

۸۰ (۴)

۷۲ (۳)

۶۴ (۲)

۵۸ (۱)

۴۸- مطابق شکل، نردبانی به دیواری تکیه داده است. اگر فاصله‌ی پای نردبان تا دیوار ۳ متر و طول نردبان ۶ متر باشد، شیب نردبان، کدام است؟

$$\sqrt{3} \quad (1) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

۴۹- اگر $\text{Cotg } \theta = -2$ و انتهای قوس θ در ربع چهارم باشد، $\text{Cos } \theta$ کدام است؟

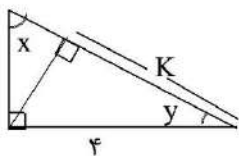
$$\frac{2}{5} \quad (1) \quad \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (2) \quad \frac{-2}{5} \quad (3) \quad \frac{-2\sqrt{5}}{5} \quad (4)$$

۵۰- حاصل $\text{Sin}^2 \alpha (1 + \text{Cotg}^2 \alpha)$ کدام است؟

$$\text{Cos } \alpha \quad (4) \quad \text{Sin } \alpha \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad -1 \quad (1)$$

۵۱- حاصل $(\text{Cos}^4 x - \text{Sin}^4 x)(1 + \text{tg}^2 x) + \text{tg}^2 x$ کدام است؟

$$\text{صفر} \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$



۵۲- در شکل زیر مقدار k کدام است؟

$$4 \text{ Sin } x \quad (1) \quad 4 \text{ Sin } y \quad (2) \quad \frac{1}{4} \text{ Sin } x \quad (4) \quad \frac{1}{4} \text{ Sin } y \quad (3)$$

۵۳- اگر $\text{tg } x = -\frac{1}{3}$ و $\text{Cos } x < 0$ ، مقدار $\text{Sin } x$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (1) \quad -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (2) \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (4)$$

۵۴- اگر $x = \frac{2}{\text{Sin } \alpha}$ ، $y = 3 \text{ Cotg } \alpha$ ، مقدار $9x^2$ چقدر است؟

$$4 + 9y^2 \quad (1) \quad 9 + 4y^2 \quad (2) \quad 36 - 4y^2 \quad (3) \quad 36 + 4y^2 \quad (4)$$

۵۵- حاصل $\text{Sin}^2 x \text{Cos}^2 x (2 + \text{tg}^2 x + \text{Cotg}^2 x)$ کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 1 + \text{Cos}^2 x \quad (3) \quad 1 + \text{Sin}^2 x \quad (4)$$

۵۶- به ازای کدام مقدار A تساوی $\text{tg}^4 x - 1 = \frac{1}{\text{Cos}^4 x} + \frac{A}{\text{Cos}^2 x}$ یک اتحاد است؟

$$2 \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad -1 \quad (3) \quad -2 \quad (4)$$

۵۷- حاصل عبارت $\frac{1 + \sin x \cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x}$ برابر کدامیک از مقادیر زیر است؟

(۱) $(\sin x + \cos x)$ (۲) $\frac{1}{(\sin x + \cos x)}$ (۳) $(\cos x - \sin x)$ (۴) $\frac{1}{(\sin x - \cos x)}$

۵۸- اگر $\sin \alpha$ با $\cot \alpha$ برابر باشد. $\cos \alpha$ چقدر است؟

(۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۲) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (۴) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

۵۹- با فرض $\text{tg}^2 x = 3$ ، حاصل کسر $\frac{\sin^2 x + 3\cos^2 x}{3\sin^2 x - \cos^2 x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۶۰- حاصل کسر $\frac{\text{tg}(a) + \text{tg}(b)}{\text{Cotg}(a) + \text{Cotg}(b)}$ برابر است با:

(۱) $\text{tg}(a) + \text{tg}(b)$ (۲) $\text{tg}(a) \cdot \text{tg}(b)$ (۳) $\text{Cotg}(a) + \text{tg}(b)$ (۴) $\text{tg}(a) \cdot \text{Cotg}(b)$

۶۱- عبارت $\text{tg}^2(x) - \sin^2(x)$ برابر است با:

(۱) $\text{tg}^2(x) \sin^2(x)$ (۲) $\text{tg}^2(x) \cos^2(x)$ (۳) $\text{Cotg}^2(x) \sin^2(x)$ (۴) $\text{Cotg}^2(x) \cos^2(x)$

۶۲- عبارت $\frac{\text{Cotg} \theta}{\sin \theta \cos \theta}$ برابر است با:

(۱) $1 + \text{Cotg}^2 \theta$ (۲) $1 + \sin^2 \theta$ (۳) $1 + \text{tg}^2 \theta$ (۴) $1 + \cos^2 \theta$

۶۳- خلاصه شده عبارت $1 - \cos^2 \alpha (2 + \text{tg}^2 \alpha)$ برابر کدام است؟

(۱) $\cos^2 \alpha$ (۲) $\sin^2 \alpha$ (۳) $1 + \sin^2 \alpha$ (۴) $\text{tg}^2 \alpha$

۶۴- اگر $\text{tg} \alpha = \frac{1}{4}$ آنگاه $\sin^2 \alpha$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۶۵- خلاصه شده عبارت $(1 - \sin^2 \theta)(1 + \text{tg}^2 \theta)$ برابر کدام است؟

(۱) 1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\sin^2 \theta$ (۴) $\cos^2 \theta$

۶۶- حاصل $\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} + 1\right)$ برابر کدام است؟

(۱) $\text{tg}^2\theta$ (۲) $\text{Cotg}^2\theta$ (۳) $\frac{1}{\sin^2\theta}$ (۴) $\frac{1}{\cos^2\theta}$

۶۷- خلاصه شده $\text{tg}\theta (\text{Cotg}\theta + \text{tg}\theta)$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{1}{\cos^2\theta}$ (۲) $\frac{1}{\sin^2\theta}$ (۳) $\cos^2\theta$ (۴) $\sin^2\theta$

۶۸- عبارت $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ با کدام برابر نیست؟

(۱) $1 - 2\sin\theta\cos\theta$ (۲) $1 - 2\sin^2\theta$ (۳) $2\cos^2\theta - 1$ (۴) $\cos^4\theta - \sin^4\theta$

۶۹- حاصل $(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 2\text{tg}\theta\cos^2\theta$ برابر کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\text{tg}\theta$ (۳) $1 + \text{Cotg}\theta$ (۴) ۰

۷۰- حاصل $\frac{1}{\sin x \cos x} - (1 + \text{Cotg}x)(1 + \text{tg}x)$ برابر کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۷۱- حاصل عبارت مثلثاتی $\sin^2x \text{Cotg}^2x + \cos^2x \text{tg}^2x + \text{tg}^2x$ کدام است؟

(۱) $1 + \sin^2x$ (۲) $1 + \cos^2x$ (۳) $\frac{1}{\sin^2x}$ (۴) $\frac{1}{\cos^2x}$

۷۲- حاصل عبارت مثلثاتی $(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)\left(\frac{1}{1 + \text{Cotg}^2\alpha} - \frac{1}{1 + \text{Cotg}^2\beta}\right)$ کدام است؟

(۱) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$ (۲) $\sin^4\alpha + \sin^4\beta$ (۳) $\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^2\beta \cdot \cos^2\beta$ (۴) $\sin^2\alpha \sin^2\beta - \cos^2\alpha \cos^2\beta$

۷۳- حاصل عبارت $\cos^4x - \sin^4x + 2\sin^2x$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۴- ساده شده عبارت مثلثاتی $\sin^2\alpha(2 + \text{Cotg}^2\alpha) - 1$ برابر است با:

(۱) $\cos^2\alpha$ (۲) $\sin^2\alpha$ (۳) $\text{Cotg}^2\alpha$ (۴) $\text{tg}^2\alpha$

۷۵- حاصل عبارت $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) $\cos^2 x$ (۳) $1 - 2\sin^2 x$ (۴) $1 - 2\cos^2 x$

۷۶- اگر $\cos x = \frac{1}{2}$ و $\cos y = \frac{2}{3}$ ، حاصل $\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg}^2 y$ کدام است؟

(۱) ۸ (۲) $\frac{8}{15}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) ۴

۷۷- عبارت $\frac{\cos \theta + 1}{\sin^2 \theta}$ برابر است با:

(۱) $\frac{1}{\sin \theta - \sin \theta \cdot \cos \theta}$ (۲) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}$
 (۳) $\frac{1}{\cos \theta - \sin \theta}$ (۴) $\frac{1}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$

۷۸- ساده شده‌ی عبارت $\sin x \cos x (\operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x)$ کدام است؟

(۱) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{Cotg} x$ (۲) $\frac{1}{\sin x}$ (۳) $\frac{1}{\cos x}$ (۴) $\sin x \cdot \cos x$

۷۹- عبارت $\left(\frac{1}{\cos \alpha} + 1\right) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right)$ برابر است با:

(۱) $\operatorname{Cotg}^2 \alpha$ (۲) $\operatorname{tg}^2 \alpha$ (۳) $1 + \tan^2 \alpha$ (۴) $\tan \alpha$

۸۰- ساده شده‌ی عبارت $(1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta)$ کدام است؟

(۱) $2 \cot^2 \theta$ (۲) $2 \tan^2 \theta$ (۳) $1 - 2 \cos^2 \theta$ (۴) $1 - 2 \sin^2 \theta$

۸۱- مقدار عددی عبارت $(\sin 60^\circ - \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ + \cos 45^\circ)$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۸۲- حاصل عبارت مثلثاتی $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \operatorname{Cotg} \alpha \cdot \sin^2 \alpha$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\operatorname{tg} \alpha$ (۴) $\operatorname{Cotg} \alpha$

۸۳- حاصل عبارت مثلثاتی $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{Cotg} x + \operatorname{Cotg} y}$ برابر است با:

(۱) $\sin x \cdot \sin y$ (۲) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$ (۳) $\cos x \cdot \cos y$ (۴) $\operatorname{Cotg} x \cdot \operatorname{Cotg} y$

۸۴- اگر $\text{Cotg } x = \frac{3}{4}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{4}{\text{Sin } x} - \frac{3}{\text{Cos } x}$ برابر است با:

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $\frac{4}{3}$

۸۵- مقدار عددی عبارت مثلثاتی $\frac{1}{\text{Sin } \alpha \text{ Cos } \alpha} - \text{Cotg } \alpha + \text{tg } \alpha$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۸۶- حاصل عبارت مثلثاتی $(\text{Cotg }^2 \alpha + 2)(1 - \text{Cos }^2 \alpha)$ بر حسب $\text{Sin } \alpha$ کدام است؟

- (۱) $1 + \text{Sin }^2 \alpha$ (۲) $2 \text{Sin }^2 \alpha$ (۳) $-\text{Sin }^2 \alpha$ (۴) $\text{Sin }^2 \alpha$

۸۷- ساده شدهی $\text{Sin }^2 \theta (1 + \text{cot }^2 \theta)$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\text{Cos }^2 \theta$ (۳) $\tan \theta$ (۴) $\tan^2 \theta$

۸۸- ساده شده عبارت $(\text{Sin } \theta - \text{Cos } \theta)^2 + \frac{2 \text{tg } \theta}{1 + \text{tg }^2 \theta}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\text{Cos }^2 \theta$ (۴) $\text{tg }^2 \theta$

۸۹- حاصل $(\text{tg } x + \text{Cotg } x)^2 - \left(\frac{1}{\text{Sin } x} - \frac{1}{\text{Cos } x}\right)^2 - \frac{2}{\text{Sin } x \text{Cos } x}$ برابر کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۱

۹۰- به ازای کدام مقادیر m نقطه $A(m - 1, 2m + 1)$ همواره در ناحیه دوم است؟

- (۱) $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ (۲) $1 \leq m \leq \frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ (۴) هیچ مقدار

$$(1 - \cot^2 \theta)(\cot^2 \theta + 1)$$

۹۱- عبارت مقابل را بر حسب $\text{Cos } \theta$ بنویسید:

$$(1 - \text{Sin }^2 \theta) \left(1 + \frac{1}{\text{Cos }^2 \theta}\right)$$

۹۲- عبارت مقابل را بر حسب $\text{Cos } \theta$ بنویسید:

$$2 \text{Sin }^2 \theta - 1$$

۹۳- عبارت مقابل را بر حسب $\text{Cos } \theta$ بنویسید:

$$\frac{\tan \theta}{\text{Sin } \theta}$$

۹۴- عبارت مقابل را بر حسب $\text{Cos } \theta$ بنویسید:

$$\cot \theta \cdot \text{Cos } \theta$$

۹۵- عبارت مقابل را بر حسب $\text{Sin } \theta$ بنویسید:

فصل سوم

توان های گویا

عبارات جبری

اتحاد و تجزیه

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

اتحادهای تکمیلی:

۱) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = a^4 - b^4$

اثبات:

۲) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2) \dots (a^k + b^k) = a^{2k} - b^{2k}$

اثبات:

۳) $(a \pm b \pm c \dots \pm m)^2 = \sum a^2 \pm 2 \sum ab$

اثبات:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

انتخاب r شی از n شی:

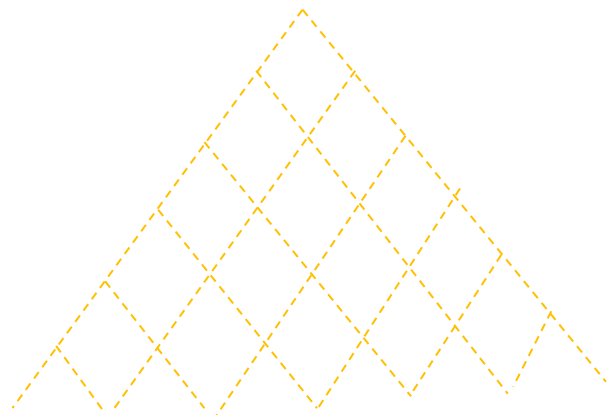
چند نکته: ۱) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ۲) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ ۳) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

۴) $\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$ ۵) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n-1} = 2^n$

بسط دو جمله ای نیوتن:

۴) $(a + b)^n =$

مثلث پاسکال - خیام:



$$۵) a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$۶) a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$$

$$۷) (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$۸) (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$۹) (a - b)^2 - (a + b)^2 = -4ab$$

$$۱۰) a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$۱۱) a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$۱۲) (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \quad (\text{اتحاد اولر})$$

$$۱۳) (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 \quad (\text{اتحاد لاگرانژ})$$

اتحادهای شرطی:

$$۱- اگر $x + \frac{1}{x} = a$ آنگاه: $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$$$

$$۲- اگر $x - \frac{1}{x} = a$ آنگاه: $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + 2$$$

$$۳- اگر $x^2 + \frac{1}{x^2} = a$ آنگاه: $x^4 + \frac{1}{x^4} = a^2 - 2$$$

$$۴- اگر $x^2 - \frac{1}{x^2} = a$ آنگاه: $x^4 + \frac{1}{x^4} = a^2 + 2$$$

$$۵- اگر $x + \frac{1}{x} = a$ آنگاه: $x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$$$

$$۶- اگر $x - \frac{1}{x} = a$ آنگاه: $x^3 - \frac{1}{x^3} = a^3 + 3a$$$

تمرین

۱ هریک از عبارت‌های زیر را تا حد ممکن (به عبارت‌های گویا) تجزیه کنید.

(ت) $a^3b^6 - 8$

(ب) $8a^3 + 27$

(ب) $x^6 - y^6$

(الف) $x^4 - y^4$

۲ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

(ت) $\frac{6}{2\sqrt[3]{2}-1}$

(ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}$

(ب) $\frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

(الف) $\frac{3}{3+\sqrt{7}}$

۳ با استفاده از اتحادها، حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

(ت) 105^2

(ب) 9999^2

(ب) 105^2

(الف) $16 \times 14 = (15+1)(15-1) = 15^2 - 1 = 224$

۴ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} - \frac{1}{x-1}$

(الف) $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1}$

۵ اگر $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4} = 3$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}$ را به دست آورید.

تمرین و تست فصل ۴

۱- اگر $x = \frac{(\sqrt{2}-2)}{\sqrt{2}}$ باشد، حاصل $x^3 - 5x$ کدام است؟

۱ (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴)

۲- اگر $x = \sqrt{3} \sqrt{1+\sqrt{2}} - \sqrt{2} \sqrt{1-\sqrt{2}}$ باشد، مقدار $x^3 - 3x$ کدام است؟

۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

۳- عبارت $x^3 + 8$ بر کدامیک از عبارات زیر بخش پذیر است؟

۱ (۱) $x^2 - 2x + 4$ (۲) $x - 2$ (۳) $x^2 + 2x + 4$ (۴) $x^2 + 2$

۴- ریشه معادله $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$ برابر است با:

۱ (۱) $-1 - \sqrt[3]{2}$ (۲) $1 + \sqrt[3]{2}$ (۳) $-1 + \sqrt[3]{2}$ (۴) $+1 - \sqrt[3]{2}$

۵- عبارت $x^3 - 3x^2 + 3x - 3\sqrt{3}$ به ازای $x = \sqrt{3} + 1$ برابر است با:

۱ (۱) $1 + 3\sqrt{3}$ (۲) $1 + \sqrt{3}$ (۳) ۱ (۴) $3\sqrt{3} - 1$

۶- حاصل عبارت $(x+1)^3 - 3x(x+1)$ برابر است با:

۱ (۱) $x^3 + 1 - 3x^2 - 3x$ (۲) $x^3 + 1$ (۳) $x^3 - 3x$ (۴) $x^3 - 3x^2$

۷- حاصل $(1 - \sqrt{2})^3 + \sqrt{50}$ برابر کدام است؟

۱ (۱) $3 - \sqrt{2}$ (۲) $5 + \sqrt{2}$ (۳) ۷ (۴) ۹

۸- ساده شده عبارت $(x+1)^3 - 3x(x+1)$ برابر است با:

۱ (۱) $x^3 - 1$ (۲) $(x-1)^3$ (۳) $x^3 + 3x$ (۴) $x^3 + 1$

۹- با استفاده از $(a-1)^3$ ، حاصل 999^3 را به دست آورید.

$(2x+3)^3$

۱۰- با استفاده از اتحادها عبارت مقابل را حساب کنید.

$(2+abc)^3$

۱۱- با استفاده از اتحادها عبارت مقابل را حساب کنید.

۱۲- با استفاده از اتحادها عبارت مقابل را حساب کنید. $(2x - 1)^3$

۱۳- با استفاده از اتحادها عبارت مقابل را حساب کنید. $(ax - by)^3$

۱۴- در جای خالی چه عبارتی قرار دهیم تا حاصل مکعب دوجمله‌ای باشد؟ $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + \dots$

۱۵- اگر $x^2 + y^2 = 1$ باشد، حاصل عبارت $x^6 + y^6$ کدام است؟

- (۱) $3xy - 1$ (۲) $x^2 + y^2 - 3xy$ (۳) $2 + 3x^2y^2$ (۴) $1 - 3x^2y^2$

۱۶- حاصل عبارت زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

$$(3x + 2)^3$$

۱۷- با استفاده از اتحادها جای خالی را پر نمایید.

$$(x + 1)^3 = x^3 + \dots + 3x + \dots$$

۱۸- حاصل $(1001)^3$ کدام است؟

- (۱) 1003003001 (۲) 1000300031 (۳) 1000300301 (۴) 1000003001

$$(1+a)^3$$

۱۹- به کمک اتحاد حاصل عبارت روبه‌رو را به دست آورید.

۲۰- اگر $(x^2 + Ax + 16)(x + 4)$ به صورت $x^3 + Bx^2 + Cx + D$ باشد، کدام است؟

- (۱) -4 (۲) -2 (۳) 2 (۴) 4

۲۱- کدام عدد زیر یک مقسوم علیه عدد $(35)^3 + (37)^3$ است؟

- (۱) 1271 (۲) 1281 (۳) 1289 (۴) 1299

۲۲- عبارت $a^3 + b^3$ بر کدام عبارت بخش پذیر است؟

- (۱) $a - b$ (۲) $a^2 + ab + b^2$ (۳) $a^2 - ab + b^2$ (۴) $ab + a + b$

۲۳- عبارت $x^3 - y^3$ بر کدامیک از عبارات زیر بخش پذیر است؟

- (۱) $x^2 + xy + y^2$ (۲) $x^2 - xy + y^2$ (۳) $x + y$ (۴) $x + y + xy$

۲۴- عبارت $x^{24} + 1$ بر کدام عدد همواره بخش پذیر است؟

- (۱) $x^{12} + 1$ (۲) $x^3 + 1$ (۳) $x^6 + 1$ (۴) $x^8 + 1$

۲۵- حاصل عبارت $(x+1)(x^2-x+1) - (x-1)(x^2+x+1)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) $2x^3$

۲۶- حاصل $(9a^2 + 6a + 4) - (3a - 2) - 27a^3$ برابر کدام است؟

- (۱) $a + 8$ (۲) ۸ (۳) $-a + 8$ (۴) $2a + 8$

۲۷- حاصل $(4x^2 + 6xy + 9y^2) + (2x - 3y) + 27y^3$ برابر کدام است؟

- (۱) $8x^3$ (۲) $8x^3 - x^2y$ (۳) $8x^3 - y^3$ (۴) $8x^3 - xy^2$

۲۸- حاصل عبارت $\frac{a^2 - ab + b^2}{a^3 + b^3}$ به ازای $a = \frac{1}{2}$ و $b = \frac{1}{3}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) ۶

۲۹- حاصل عبارت جبری $\left(\frac{x^3+y^3}{x+y} - \frac{x^3-y^3}{x-y}\right) \div 2xy$ برابر است با:

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۱

۳۰- مقدار عددی عبارت جبری $(2x+1)(4x^2-2x+1)$ به ازای $x = \sqrt[3]{2}$ کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۴ (۳) ۱۷ (۴) ۲۱

۳۱- حاصل $(x+1)(-x+x^2+1) - (x-1)(x^2+x+1)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) $2x^3$ (۴) ۲

۳۲- حاصل عبارت $(4x^2 - 6x + 9) - (2x + 3) - \sqrt[3]{-3}$ به ازای $x = \sqrt[3]{-3}$ چقدر است؟

- (۱) $-\sqrt[3]{3}$ (۲) -۳ (۳) $3 - \sqrt[3]{-3}$ (۴) ۳

$(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$

۳۳- عبارت مقابل را ساده کنید:

$(3ax - \frac{1}{2})(9a^2x^2 + \frac{3}{2}ax + \frac{1}{4})$

۳۴- عبارت مقابل را ساده کنید:

$(a - a^2)(a^2 + a^3 + a^4)$

۳۵- عبارت مقابل را ساده کنید:

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

۳۶- حاصل ضرب مقابل را با استفاده از اتحادها به دست آورید:

$$(a^2 - 1)(a^4 + a^2 + 1)$$

۳۷- حاصل ضرب مقابل را با استفاده از اتحادها به دست آورید:

$$8x^3 - 27$$

۳۸- عبارت مقابل را تجزیه کنید: $8x^3 - 27$

۳۹- حاصل $(x^2 + 2xy + 4y^2) - (x - 2y)$ کدام است؟

(۱) $8y^3$ (۲) $6y^3$ (۳) $4x^2y^2$ (۴) $2xy^2$

۴۰- اگر $x + \frac{1}{x} = \sqrt{13}$ و $0 < x < 1$ باشد مقدار $x^3 \pm x^{-3}$ را بدست آورید.

۴۱- با استفاده از اتحادها در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

$$(3x + \dots)(9x^2 - 6x + 4) = \dots + \dots$$

۴۲- با استفاده از اتحادها حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$$

۴۳- با استفاده از اتحادها جای خالی را پر نمایید.

$$(2x - 5)(4x^2 + \dots + 25) = 8x^3 - \dots$$

۴۴- عدد $(63)^3 + (97)^3$ الزاماً بر کدام عدد بخش پذیر است؟

(۱) ۳۴ (۲) ۱۰۲ (۳) ۱۴۰ (۴) ۱۶۰

۴۵- کوچکترین مضرب مشترک $a^3 - b^3$ و $(a - b)^3$ به چه صورت است؟

(۱) $a - b$ (۲) $(a^3 - b^3)(a - b)^2$ (۳) $a^2 + ab + b^2$ (۴) $(a^3 - b^3)(a - b)^3$

۴۶- عبارت $x^3 - 8y^3$ بر کدام دو جمله‌ای بخش پذیر است؟

(۱) $x - 2y$ (۲) $x + 2y$ (۳) $x + y$ (۴) $x - y$

۴۷- به کمک اتحاد حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(2-x)(4+2x+x^2)$$

۴۸- اگر $x = -2$ و $y = 1$ و $z = -1$ باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{(1 + x^2 + x^4)(1 - x^2)(x^2y^4 - 2y^2z^2x + xz^4)(2y^2 + z^2)^2}{189}$$

- (۱) ۶ (۲) -۳ (۳) -۱ (۴) صفر

۴۹- حاصل عبارت $\frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}(x + y + z)$ (۲) $-(x + y + z)$ (۳) $\frac{1}{2}(x + y + z)$ (۴) $(x + y + z)$

۵۰- ساده شدهٔ کثیرالجملهٔ $(x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n)^2$ چند جمله دارد؟

- (۱) $2n$ (۲) $2n - 1$ (۳) $2n + 1$ (۴) $\frac{n(n+1)}{2}$

۵۱- مجموع ضرایب عددی بسط $(x + y - 1)^k$ چقدر است؟ (k صحیح و مثبت است)

- (۱) 2^k (۲) $k!$ (۳) ۱ (۴) -۱

۵۲- a و b را از اتحاد $(x^3 + bx^2 + ax - 2) \equiv (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$:

- (۱) $a = -b = 1$ (۲) $a = b = -1$ (۳) $b = -a = 1$ (۴) $a = b = 1$

۵۳- مجموع جبری ضرایب در بسط عبارت $(2y - x^2 - 2)^6 - (5x - 3y)^5$ کدام است؟

- (۱) ۳۱ (۲) ۲۹ (۳) ۳۰ (۴) ۳۳

۵۴- اتحاد زیر را ثابت کنید: $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$

۵۵- اتحاد زیر را ثابت کنید: $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$

۵۶- اتحاد زیر را ثابت کنید: $(1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) = (1 - x^{16})$

۵۷- ثابت کنید: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2} \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \}$

۵۸- $a^2 - a = b^2 - b$

۵۹- $a(a + 1) + b(b + 1) = 2(1 - ab)$

۷۸- حاصل عبارت $\frac{4\sqrt[3]{40} - 3\sqrt[3]{-135} - 4\sqrt[3]{625}}{3\sqrt[3]{5}}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۷۹- مقدار x در تساوی $\sqrt[2]{x}\sqrt[3]{x}\sqrt{x} = \sqrt[4]{8}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{2}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt[3]{4}$ (۴) ۴

$$\sqrt{\frac{4}{5}}$$

۸۰- مخرج کسر مقابل را گویا کنید و حاصل را به دست آورید.

$$\frac{25}{\sqrt[3]{25^2}}$$

۸۱- مخرج کسر مقابل را گویا کنید و حاصل را به دست آورید.

۸۲- حاصل عبارت $\sqrt[3]{2 + 2\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{6 - 4\sqrt{2}}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt[3]{2}$ (۳) $\sqrt[3]{4}$ (۴) $\sqrt{2}$

۸۳- $\frac{2}{\sqrt[5]{4}}$ برابر است با:

- (۱) $\sqrt[5]{2}$ (۲) $\sqrt[5]{6}$ (۳) $\sqrt[5]{8}$ (۴) $\sqrt[5]{16}$

۸۴- حاصل $3 \times 6^{\frac{1}{3}} \times \sqrt{216}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۲۸

۸۵- $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = ?$

- (۱) $4\sqrt[3]{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) ۲

۸۶- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\sqrt{x}}$ کدام است؟

- (۱) \sqrt{x} (۲) $\sqrt[3]{x}$ (۳) $\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$ (۴) $\sqrt[6]{x^5}$

۸۷- حاصل $\sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt{1-x}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt[6]{(x-1)^5}$ (۲) $\sqrt[6]{1-x^2}$ (۳) $-\sqrt[6]{(1-x)^5}$ (۴) $-\sqrt[6]{(x-1)^5}$

۸۸- کسر $\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{a}{\sqrt[6]{a}}}}$ برای $a > 0$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\sqrt[6]{a^5}}{a}$ (۲) $\frac{\sqrt[5]{a^3}}{a}$ (۳) $\frac{\sqrt[6]{a^7}}{a}$ (۴) $\frac{\sqrt[6]{a}}{a}$

۸۹- عدد $\frac{2}{\sqrt[5]{8}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt[3]{2}$ (۲) $\sqrt[3]{4}$ (۳) $\sqrt[5]{2}$ (۴) $\sqrt[5]{4}$

۹۰- حاصل عبارت رادیکالی $\sqrt{(\sqrt{48}-\sqrt{3})(\sqrt{48}+\sqrt{12})}$ برابر است با:

- (۱) $2\sqrt{6}$ (۲) $3\sqrt{6}$ (۳) 6 (۴) 36

۹۱- حاصل $(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) 3 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) 2

۹۲- مخرج کسر مقابل را گویا کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$$

۹۳- مخرج کسر مقابل را گویا کنید:

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

۹۴- مخرج کسر مقابل را گویا کنید:

$$\frac{3\sqrt{9}}{\sqrt{2}}$$

۹۵- مخرج کسر مقابل را گویا کنید:

$$\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$$

۹۶- مخرج کسر مقابل را گویا کنید:

$$\sqrt{\frac{1}{x^3}} \quad (x > 0)$$

۹۷- مخرج کسر مقابل را گویا کنید:

$$\frac{4}{\sqrt{a}}$$

۹۸- ساده کنید (متغیرها مثبت فرض شده است):

$$\frac{2^2}{\sqrt{4c}}$$

۹۹- ساده کنید (متغیرها مثبت فرض شده است):

$$\sqrt{\frac{21}{28d^3}}$$

۱۰۰- ساده کنید (متغیرها مثبت فرض شده است):

$$\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a}}$$

۱۰۱- ساده کنید (متغیرها مثبت فرض شده است):

$$\frac{\sqrt{b^3 d^4}}{\sqrt{bd}}$$

۱۰۲- ساده کنید (متغیرها مثبت فرض شده است):

۱۰۳- ضرب‌های رادیکالی زیر را انجام دهید و حاصل را ساده کنید: (حروف مثبت فرض می‌شوند)

الف) $2\sqrt{27} \times 3\sqrt{6}$ ب) $\sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[3]{a^2}$ ج) $\sqrt[5]{a^3} \times \sqrt[6]{a^5} \times \sqrt[3]{a^2}$

۱۰۴- ضرب‌های رادیکالی مقابل را انجام دهید. ب) $(2\sqrt{2} + 3)(3 - 2\sqrt{2})$ الف) $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$

۱۰۵- ضرب رادیکالی مقابل را انجام دهید. $\sqrt[3]{4 - 2\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{6 + 4\sqrt{2}}$

۱۰۶- ضرب رادیکالی مقابل را انجام دهید. $\sqrt{2\sqrt{2} - \sqrt{3}} \times \sqrt{11 + 4\sqrt{6}}$

۱۰۷- ضرب رادیکالی مقابل را انجام دهید. $\sqrt[3]{2 - \sqrt{2}} \times \sqrt[6]{6 + 4\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{4}$

۱۰۸- حاصل $A = \frac{\sqrt{2}(3+2\sqrt{2}) \times 2(1-\sqrt{2})}{(\sqrt[5]{4} \div \sqrt[3]{8})}$ کدام است؟

- ۴ (۴) $\frac{99}{240}$ (۳) $\frac{5}{22}$ (۲) $\sqrt{2}\sqrt[3]{2}$ (۱)

$\frac{1}{\sqrt[3]{2a^2}}$

۱۰۹- مخرج کسر را گویا کنید.

فصل ۴

معادله ها و نا معادله ها

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

x	$-\frac{1}{3}$	2
$4 - 2x$	+	+
$3x + 1$	-	+
$\frac{4 - 2x}{3x + 1}$	-	+

تقریباً

معادله درجه دوم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

مبین معادله درجه دوم - مبین معادله درجه دوم بیان می کند که معادله دارای ریشه حقیقی است یا ریشه حقیقی ندارد. مبین معادله درجه دوم را با Δ (دلتا) نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

حل و بحث در معادله درجه دوم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x' \text{ و } x'' = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حل در حالت کلی (دستور b):

$$\begin{cases} \Delta > 0 \rightarrow \text{دو ریشه متمایز دارد} \\ \Delta = 0 \rightarrow \text{یک ریشه مضاعف دارد} \\ \Delta < 0 \rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

چند نکته:

۱- اگر $a = 0$ ، معادله ممتنع (غیر ممکن یا نشدنی) است.

۲- اگر $b = 0$ ، معادله دو ریشه قرینه دارد به شرط آن که:

۳- اگر $c = 0$ ، معادله یک ریشه صفر دارد ($x' = 0$) و ریشه دیگر $x'' = -\frac{b}{a}$.

۴- اگر مجموع ضرایب برابر با صفر باشد، آنگاه معادله یک ریشه برابر با «۱» دارد.

۵- اگر $a + c = b$ آنگاه معادله یک ریشه برابر با «-۱» دارد.

۶- اگر $\frac{c}{a} < 0$ ، آنگاه $\Delta > 0$ و معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

تمرین

۱) معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

$$۱) x^2 - 11x = -10$$

$$۲) 5t^2 = 20$$

$$۳) 5a^2 - 7a = 2a(a - 3)$$

$$۴) 4k^2 - 12k + 8 = 0$$

۲) هر یک از معادله‌های زیر را با ریشه دوم گرفتن حل کنید.

$$۱) n^2 - 2 = 26$$

$$۲) x^2 + 12 = 3$$

$$۳) (3t - 2)^2 = 4$$

$$۴) 3 - 3k = 3k(2k - 1)$$

۳) معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

$$۱) x^2 - 6x = 7$$

$$۲) s^2 - 3s + 3 = 0$$

$$۳) r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$۴) 2a^2 + 5a - 3 = 0$$

۴) هر یک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

۱) $4x^2 - 12x + 3 = 0$

۲) $x^2 - x^2 = 3$

۳) $a^2 + 2\sqrt{3}a = 9$

۴) $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} = 0$

۵) هر یک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

۱) $2x^2 = 250$

۲) $9 - 6z + z^2 = 0$

۳) $4a^2 + 3a = 1$

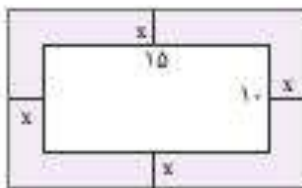
۴) $b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$

۶) مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید.



۷) طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

۸) اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟



۹) یک عکس به اندازه ۱۰۰ در ۱۵ سانتی متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.



۱۰) در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را به دست آورید. اگر تعداد بازی‌های تیمگان N و تعداد تیم‌ها k باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها به دست آورید.



۱۱) فشار خون نرمال^۱ یک شخص مذکر، که بر حسب میلی‌متر جیوه (mmHg) اندازه‌گیری می‌شود، با رابطه $P = 0.0065s^3 - 0.025s + 120$ محاسبه می‌شود که در آن P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی‌متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید.)

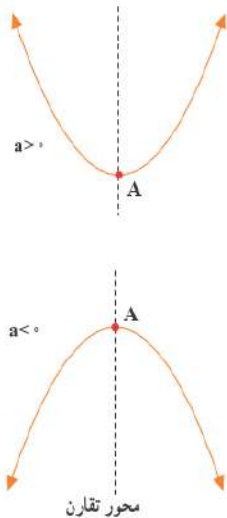
سهمی: سهمی بر دو نوع است، سهمی قائم و سهمی افقی. در این درس هر جا گفته می شود سهمی، منظور سهمی قائم است.

معادله سهمی:

۱- معادله کانونیک سهمی:

$$y = a(x - h)^2 + k, (a \neq 0) \rightarrow \begin{cases} S(h, k) & \text{راس سهمی} \\ x = h & \text{خط تقارن سهمی} \\ \text{راس سهمی ماکزیمم یا می نیمم است} & \end{cases}$$

۲- معادله گسترده سهمی:



$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow \begin{cases} S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \rightarrow \text{راس سهمی} \\ a > 0 \rightarrow \text{نقطه S می نیمم است} \\ a < 0 \rightarrow \text{نقطه S ماکزیمم است} \end{cases}$$

نکته: طول راس سهمی یعنی « $x = -\frac{b}{2a}$ » خط تقارن سهمی است.

طول از مبدا - اگر $y = 0$ باشد، ریشه های معادله در صورت وجود طول از مبدا است و نمودار سهمی در این نقاط محور طول ها را قطع می کند.

عرض از مبدا - اگر $x = 0$ باشد، $y = c$ عرض از مبدا است و نمودار سهمی در این نقطه محور عرض ها را قطع می کند.

تمرین

۱) نمودار هر یک از سهمی های زیر را رسم کنید.

الف) $y = -(x+1)^2 - 3$

ب) $y = 3x^2 - 2$

پ) $y = x - x^2$

ت) $y = \frac{x^2}{2} + x - 4$

۲) اگر $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست

آورید.

۳) نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، محور y ها را در نقطه ای به عرض ۲ و محور x ها را

در نقاط به طول ۱- و ۲ قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

۲ دو پرتابگر وزنه در یک مسابقه ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A، زاویه α را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه $y = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}x + 2$ به دست می‌آید. پرتابگر B نیز زاویه β را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطه $y = -2x^2 + 3x + 2$ به دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور x ها در چه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازه آنها را مشخص کنید.

تعیین علامت عبارت جبری: تعیین علامت عبارت جبری، یعنی مشخص کنیم که یک عبارت جبری به ازای چه مقادیری

از x عبارت صفر و به ازای چه مقادیری از x عبارت منفی یا مثبت است.

در حالت کلی برای تعیین علامت به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- ریشه‌های صورت و مخرج را به دست می‌آوریم و در جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم.

۲- به ازای ریشه‌های صورت عبارت صفر و به ازای ریشه‌های مخرج تعریف نشده و نامعین است.

۳- از چپ به راست علامت، موافق علامت ضریب بزرگترین توان (درجه) می‌باشد. بعد از ریشه‌های ساده علامت

عوض می‌شود، اما بعد از ریشه‌های مضاعف علامت تغییر نمی‌کند.

۴- اگر عبارت ریشه نداشته باشد، همواره موافق علامت ضریب بزرگترین توان (درجه) می‌باشد.

۵- در سطر آخر علامت‌های هر ستون در هم ضرب می‌شود.

نکته - یکی از کاربردهای مهم تعیین علامت در حل نامعادلات می‌باشد.

تمرین

۱ در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $1 < 2x - 3 \leq 3$ ب) $x(x^2 + 4) < 0$

ب) $x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$ ج) $\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$

ب) $-2 < \frac{5-x}{2} < 0$ ج) $|7 - 2x| < 1$

ت) $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ ح) $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$

۲ به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 2x + k$ همواره مثبت است؟

۳ به ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور x هاست؟

۴ یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

۵ تعداد ضربان قلب، x دقیقه ($0 \leq x \leq 8$) پس از پایان یک کار سنگین بدنی، طبق رابطه $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از 110 بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول اند؟

تمرین و تست فصل ۴

۱- یکی از جوابهای معادله درجه دوم $x^2 + kx - 10 = 0$ برابر ۵ است، جواب دیگر این معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

۲- مجموع ریشههای معادله $(x^2 - 2x - 3)(x - 1) = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳- اگر اعداد ۱ و ۱- ریشههای معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند کدامیک از روابط زیر برقرار است؟

(۱) $a - b = 0$ (۲) $a - c = 0$ (۳) $a + b = 0$ (۴) $a + c = 0$

۴- معادله $x^2 - 2mx + 6 - m = 0$ به ازای کدامیک از مقادیر m دارای دو ریشه مساوی است؟

- (۱) ۳ و ۲ (۲) ۲ و ۳ (۳) ۱ و $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ و ۱

۵- اگر معادله $x^2 + 2mx + m^2 + n = 0$ دارای دو ریشه مساوی باشد بین m و n کدام رابطه برقرار است؟

- (۱) $m - n = 0$ (۲) $m + n = 0$ (۳) $m = 0$ (۴) $n = 0$

۶- به ازای کدام مقدار a ریشههای معادله $x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2 = 0$ با هم برابرند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۷- محل تلاقی خط $y = x$ و سهمی $y = x^2$ کدام است؟

- (۱) (۰ و ۰) (۲) (۱ و ۱) (۳) (۱ و ۱) (۴) (۱ و ۱) و (۰ و ۰)

۸- نقطه تلاقی نمودار تابع $y = x^2 - x - 4$ با نیمساز ناحیه دوم کدام است؟

- (۱) (۲ و ۲) (۲) (۲ و ۲) (۳) (۴ و ۴) (۴) (۴ و ۴)

۹- منحنی (C) به معادله $y^2 - 3xy + 2 = 0$ نیمساز ربع دوم را در چند نقطه قطع می کند؟

- (۱) یک نقطه (۲) دو نقطه (۳) چهار نقطه (۴) هیچ نقطه

۱۰- مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی ۹۲۵ است مجموع این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۴۱ (۲) ۴۳ (۳) ۴۵ (۴) ۴۷

۱۱- اگر معادله درجه دوم $(m+2)x^2 + 4x + (m-1) = 0$ دارای دو جواب حقیقی باشد، مقادیر m کدام است؟

- (۱) $-2 \leq m \leq 1$ (۲) $1 \leq m \leq 2$ (۳) $-2 \leq m \leq 2$ (۴) $-3 \leq m \leq 2$

۱۲- حاصلضرب دو عدد فرد متوالی ۳۲۳ است مجموع این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۴ (۳) ۳۵ (۴) ۳۶

۱۳- اگر $(a - 1) \neq 0$ باشد معادله $ax^2 + 4 = x^2 + 4a$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) بیشمار (۴) جواب ندارد

۱۴- معادله $(x^2 + \sqrt{x+1})^2 + x^2 + \sqrt{x-1} = 0$ چندریشه حقیقی دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۵- معادله $(x^2 + x + 1)^2 + x^2 + x - 1 = 0$ چندریشه حقیقی دارد؟

- (۱) ریشه حقیقی ندارد (۲) یک ریشه (۳) دوریشه (۴) چهارریشه

۱۶- جوابهای معادله $(a + b)x^2 + (c - a)x - b - c = 0$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{(b+c)}{(a+b)}$ (۲) $-b - c$ (۳) $-\frac{(b+c)}{(a+b)}$ (۴) $-\frac{(b+c)}{(a+b)}$ ، -1

۱۷- ریشه مضاعف معادله $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ و $\frac{3}{4}$ (۴) ۰

۱۸- اگر عرض راس سهمی به معادله $y = x^2 - 2x - 4a$ برابر ۷ باشد سهمی محور عرضها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

- (۱) -۸ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) -۷

۱۹- مجموع ریشه‌های معادله $25x^2 + 1 = 8x^2 + 1$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) ۰ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۰- به ازای کدام مقدار m عبارت $25x^2 + mx + \frac{1}{4}$ مربع کامل است؟

- (۱) $\pm \frac{5}{4}$ (۲) ± 4 (۳) ± 5 (۴) ± 10

۲۱- به ازای کدام مقدار a یکی از ریشه‌های معادله $2x^2 - 7x + a - 1 = 0$ برابر صفر است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۲۲- معادله‌ی $(x^2 - 1)^2 + (x + 1)^2 = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲۳- به ازای کدام مقدار m دو ریشه معادله $mx^2 - (m^2 - 4)x + 3 = 0$ قرینه یکدیگرند؟

۲ (۱) -۲ (۲) ± 2 (۳) ± 1 (۴)

۲۴- اگر معادله درجه دوم $x^2 + bx + c = 0$ دارای ریشه مضاعف $x = 5$ باشد، مقدار $b + c$ چقدر است؟

۱۵ (۱) ۱۵ (۲) -۱۰ (۳) ۱۰ (۴)

۲۵- حدود m چقدر باشد تا معادله درجه دوم $mx^2 - (2m-1)x + m-2 = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد؟

$m > \frac{1}{4}$ (۱) $m < \frac{1}{4}$ (۲) $m > \frac{-1}{4}$ (۳) $m < \frac{-1}{4}$ (۴)

۲۶- معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید:

الف) $2x^2 - 8x + 2 = x^2 - 10$

ب) $x^2 - 2x + 1 = 6x^2 + x + 1$

۲۷- معادله‌های زیر را به روش‌های معین شده حل کنید:

الف) $7x^2 - 27x - 4 = 0$ (روش Δ)

ب) $x^2 - 25 + 3(x + 5) = 0$ (روش تجزیه)

۲۸- معادله‌های زیر را به روش تجزیه حل کنید:

الف) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

ب) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$

۲۹- معادله‌ی الف را به روش مربع کامل و معادله‌ی ب را به روش Δ حل کنید.

الف) $-x^2 + 14x - 49 = 0$

ب) $x^2 - 5x + 6 = 0$

۳۰- مجموعه جواب معادله‌ی روبرو را بدست آورید:

$x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

۳۱- با در نظر گرفتن یک مجهول معاون مناسب معادله مقابل را حل کنید.

$(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$

۳۲- مجموعه جواب معادله مقابل را بدست آورید:

$$(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$$

۳۳- مجموعه جواب معادله مقابل را تعیین کنید:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = 5$$

$$(y + 1)^6 + 20 = 9(y + 1)^3$$

۳۴- به ازای چه مقادیری از y تساوی روبرو برقرار است؟

۳۵- مجموعه جواب معادله $|4x - 5| = 2x + 3$ را بدست آورید.

۳۶- در معادله $mx^2 + 3x - m = 0$ مقدار m را چنان معین کنید که مبین معادله $\Delta = 25$ باشد.

۳۷- ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 = -4|x| + 3$ کدام است؟

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \quad (4) \quad -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \quad (3) \quad -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \quad (2) \quad -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \quad (1)$$

۳۸- گزینه «نادرست» در مورد نمودار سهمی $y = (1 - x)^2 - 2$ کدام است؟

- (۱) دارای نقطه ماکزیمم
(۲) محور تقارن: $x = 1$
(۳) عرض نقطه تلاقی با محور y ها: -1
(۴) مختصات راس: $(-2, 1)$

۳۹- اگر منحنی $y = x^2 + ax + 3$ دارای محور تقارن $x = 1$ باشد a کدام است؟

$$1 \quad (4) \quad -2 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad -1 \quad (1)$$

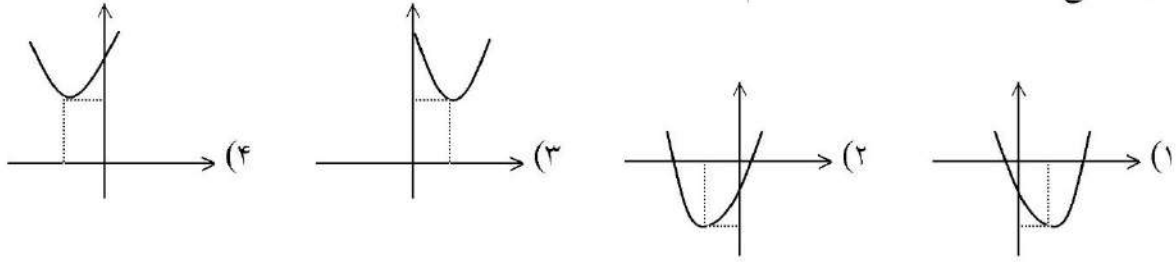
۴۰- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & x < 0 \\ x + 4 & x \geq 0 \end{cases}$ را رسم کنید.

۴۱- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x + 1 & x < 0 \end{cases}$ را در دستگاه مختصات رسم نمایید.

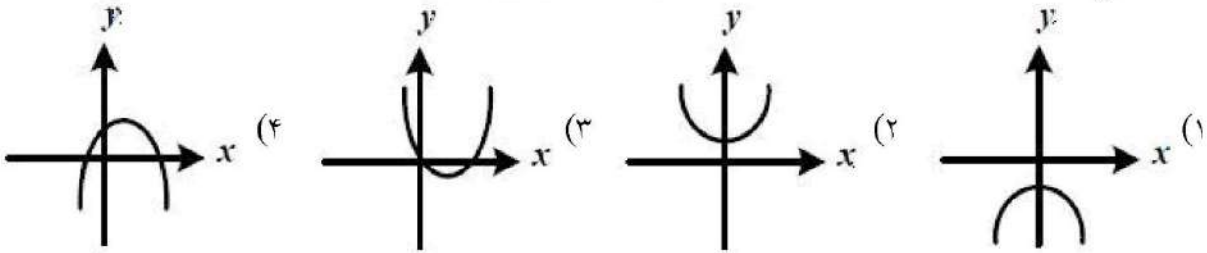
۴۲- دامنه‌ی تابع $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < -1 \\ x & x \geq -1 \end{cases}$ را مشخص نموده و نمودار آن را رسم کنید و سپس حاصل $f(f(-2))$ را

بدست آورید.

۴۳- نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2 - 2$ کدام است؟

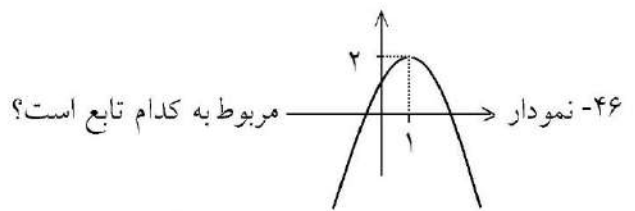


۴۴- نمودار تابع $f(x) = -x^2 + x + 2$ کدامیک از گزینه‌های زیر می‌باشد؟



۴۵- به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $(2m-1)x^2 - 4x - 3$ همواره منفی است؟

- (۱) $m < \frac{1}{2}$ (۲) $m < \frac{1}{6}$ (۳) $m < -\frac{1}{2}$ (۴) $m < -\frac{1}{6}$



- (۱) $y = (x+1)^2 + 2$ (۲) $y = -(x+1)^2 + 2$ (۳) $y = -(x-1)^2 + 2$ (۴) $y = (x-1)^2 + 2$

۴۷- مختصات رأس سهمی به معادله $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{3}{4}$ کدام است؟

- (۱) (۱, ۲) (۲) (-۱, ۰) (۳) (۲, ۱) (۴) (-۱, ۱)

۴۸- چند عدد طبیعی در نامعادله $(2-x)(3x+8) < x^2 - 4$ صدق می‌کند؟

- (۱) بی‌شمار (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) صفر

۴۹- به ازای کدام مقادیر m ، نامعادله $\frac{x^2 - x + m}{2x^2 + x + 1} < 1$ به ازای تمامی مقادیر حقیقی x برقرار است؟

- (۱) $m < -2$ (۲) $-2 < m < 1$ (۳) $-1 < m < 2$ (۴) $m < 2$

۵۰- اگر نامعادله $mx^2 + (2m - 1)x + m > 0$ برای همی مقادیر حقیقی x برقرار باشد، حدود m کدام است؟

(۱) $0 < m < 4$ (۲) $m > \frac{1}{4}$ (۳) $0 < m < \frac{1}{4}$ (۴) $m > 0$

۵۱- اگر مجموعه‌ی جواب نامعادله $-2x^2 + ax + 4 \geq 0$ به صورت $[-2, k]$ باشد، $a + k$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) 1 (۳) 3 (۴) -3

۵۲- نامساوی $k(x - 1)(x + 3) > 1$ به ازای همی مقادیر حقیقی x برقرار است. مجموعه‌ی مقادیر k کدام است؟

(۱) $\left\{ k : k < -\frac{1}{4} \right\}$ (۲) $\left\{ k : -\frac{1}{4} < k < 0 \right\}$

(۳) $\left\{ k : 0 < k < \frac{1}{4} \right\}$ (۴) ϕ

۵۳- تابع به معادله $y = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول (-2) و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض 1 قطع کرده و از نقطه‌ی (-2) و (-3) نیز می‌گذرد. مقدار $a + b + c$ کدام است؟

(۱) $0/8$ (۲) صفر (۳) $0/1$ (۴) $-0/8$

۵۴- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + 4x + (a + 1)$ ماکزیممی به عرض (-2) دارد. $f(-1)$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) -5 (۳) -11 (۴) -8

۵۵- بیش‌ترین مقدار تابع درجه‌ی دوم با ضابطه $f(x) = ax^2 + 4x + 5$ برابر 9 است. معادله‌ی محور تقارن این تابع کدام است؟

(۱) $x = 1$ (۲) $x = 2$ (۳) $x = 3$ (۴) $x = 4$

۵۶- نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ محور x ها را با طول‌های (-1) و 3 و محور y ها را با عرض 6 قطع می‌کند. فاصله‌ی رأس این سهمی از محور x ها کدام است؟

(۱) 8 (۲) 10 (۳) 12 (۴) 14

۵۷- اگر مقدار می‌نیم سهمی $y = mx^2 - 4x + 5$ بر مقدار ماکزیمم سهمی $y = (m - 4)x^2 + 4x + 1$ منطبق باشد، معادله‌ی محور تقارن این دو سهمی کدام است؟

(۱) $x = -2$ (۲) $x = -1$ (۳) $x = 1$ (۴) $x = 2$

۵۸- حدود m را چنان تعیین کنید که به ازای جمیع مقادیر x داشته باشیم:

$$-1 < \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1}$$

(۱) $-3 < m < 5$ (۲) $-4 < m < 4$
 (۳) $m > 5$ یا $m < -3$ (۴) $m > 4$ یا $m < -4$

۵۹- محور تقارن سهمی $y = x^2 + 4x + k$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض (-2) قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور x ها ایجاد می‌کند، کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $4\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

۶۰- اگر نقطه‌ی $(2, 1)$ ، نقطه‌ی می‌نیم تابع $y = x^2 + 2ax + b$ باشد، مقدار $a-b$ ، کدام است؟

- (۱) -7 (۲) 7 (۳) -3 (۴) 3

۶۱- اگر $1 - 2m + 6x + (m - 2)x^2$ برای هر عدد حقیقی x مثبت باشد، حدود m کدام است؟

- (۱) $m > 3/5$ (۲) $m > 2$ (۳) $2 < m < 3/5$ (۴) $m > 7$

۶۲- به‌ازای کدام m نمودار تابع $y = 2(1 + m)x^2 - 4mx + 1$ همواره بالای محور x ها می‌باشد؟

- (۱) $(-1, -\frac{1}{2})$ (۲) $(-1, 1)$ (۳) $(-1, \frac{1}{2})$ (۴) $(-\frac{1}{2}, 1)$

۶۳- نامعادله‌ی $-1 \leq \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}$ را حل کرده و جواب را به صورت بازه نشان دهید.

۶۴- اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

- (۱) $\{a: 1 < a < 5\}$ (۲) $\{a: a < 1\}$ (۳) \emptyset (۴) R

۶۵- مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^4 + x^2 < 4x^2 + 4$ کدام است؟

- (۱) $-2 < x < 2$ (۲) $x > 2$ یا $x < -2$ (۳) $-4 < x < 4$ (۴) $x < -4$ یا $x > 4$

۶۶- به ازای کدام مقادیر m نمودار تابع $y = (m - 1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره در زیر محور x ها است؟

- (۱) $m < \frac{-1}{2}$ (۲) $\frac{-1}{2} < m < 1$ (۳) $1 < m < \frac{3}{2}$ (۴) $m > \frac{3}{2}$

۶۷- مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{(x-3)|x+1|}{(3x+8)^2(6-x)^3} \geq 0$ کدام است؟

- (۱) $(-\infty, -\frac{1}{3})$ (۲) $[3, 6)$ (۳) $(-\frac{1}{3}, 3] \cup (6, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (6, +\infty)$

۶۸- مجموعه جواب نامعادله‌ی $|2x^2 - 3x + 5| > |x^2 + 5x - 2|$ کدام است؟

- (۱) $[1, 7]$ (۲) $x > 7$ یا $x < 1$ (۳) $[-1, 4]$ (۴) $x < -1$ یا $x > 4$

۶۹- مجموعه‌ی جواب نامعادله $\frac{5x^2 - 12x}{x^2 - 9} < 1$ کدام است؟

- (۱) \emptyset (۲) $(\frac{3}{2}, 3)$ (۳) $(-3, 3) - \{\frac{3}{2}\}$ (۴) $(-3, 3)$

۷۰- چند عدد صحیح در نامعادله $\frac{4x + 8}{x - 1} \geq 3$ صدق می‌کند؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) بی‌شمار

۷۱- مجموعه جواب نامعادله $|x - 4| < 2x - 5$ ، به کدام صورت است؟

- (۱) $(1, 5)$ (۲) $(1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$
 (۳) $(1, 5) \cup (1 + \sqrt{6}, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$

۷۲- مجموعه جواب نامعادله $\frac{3-x^2}{x} > 2$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 0)$ (۲) $(-3, 0) \cup (1, +\infty)$ (۳) $(-3, 1)$ (۴) $(-\infty, -3) \cup (0, 1)$

۷۳- اگر $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x} - 1}$ ، آن‌گاه جواب نامعادله $4 < f(x) < 8$ کدام بازه‌ی زیر است؟

- (۱) $\frac{11}{56} < x < \frac{1}{4}$ (۲) $\frac{11}{56} < x < \frac{7}{8}$ (۳) $\frac{1}{4} < x < \frac{24}{7}$ (۴) $\frac{11}{56} < x < \frac{24}{7}$

۷۴- مجموعه جواب نامعادله $(x^2 + |x| + 3)(x^4 - 81) \leq 0$ در Z چند عضو دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۷۵- اگر غلظت دارو در عضله دست چپ t ساعت بعد از تزریق آن در عضله‌ی دست راست از رابطه‌ی $C = \frac{0.12t}{t^2 + 3}$

(برحسب میلی‌گرم در هر میلی‌لیتر) به دست بیاید و مقدار مطلوب دارو حداقل 0.03 میلی‌گرم در میلی‌لیتر باشد، این مقدار مطلوب چند ساعت در عضله‌ی دست چپ دوام دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۷۶- اگر $x^2 - x \leq 6$ باشد، حاصل $|x - 3| + |x + 2|$ برابر کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۷۷- مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2|x| + 3} < 1$ کدام است؟

- (۱) $x > 0$ (۲) $x > -\frac{3}{5}$ (۳) $x > -3$ (۴) $-\frac{3}{5} < x < 0$

۷۸- اگر $|x^2 - 2x| = 2x - x^2$ ، آن‌گاه حاصل $|2x - 5| + |x + 1| + |2x + 3|$ کدام است؟

- (۱) $x + 9$ (۲) $5x - 1$ (۳) $4x - 3$ (۴) $3x - 1$

۷۹- نامعادله $3 < \frac{2x+1}{3} \leq -1$ را حل کرده و مجموعه جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

۸۰- مجموعه‌ی جواب نامعادله $|2x - 1| < x$ ، شامل چند عدد طبیعی است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۸۱- مجموعه‌ی جواب نامعادله $1 > \left| \frac{1-x}{2x-5} \right|$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۸۲- با شرط $x < -1$ ، حاصل $|1 - |x|| + \sqrt{x^2}$ کدام است؟

- (۱) $2x - 1$ (۲) $-2x - 1$ (۳) -1 (۴) ۱

۸۳- مساحت محدود به نمودار تابع با ضابطه $y = 3 - |x|$ و محور x ها کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۸۴- حاصل $|2x - 1| + |2 - x|$ وقتی $0 < x < 1$ باشد کدام است؟

- (۱) $-3 - 3x$ (۲) $3 - 3x$ (۳) $-3 + 3x$ (۴) $1 + x$

۸۵- حاصل عبارت $|2 - x| + \sqrt{1 - 4x + 4x^2}$ اگر $1 < x < 2$ باشد، کدام است؟

- (۱) $x - 3$ (۲) $x + 1$ (۳) $3x - 1$ (۴) $3x + 3$

۸۶- با شرط $x^2 + x < 0$ ، حاصل $|2 - x| - |x|$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) ۲ (۳) $2 - 2x$ (۴) $2x - 2$

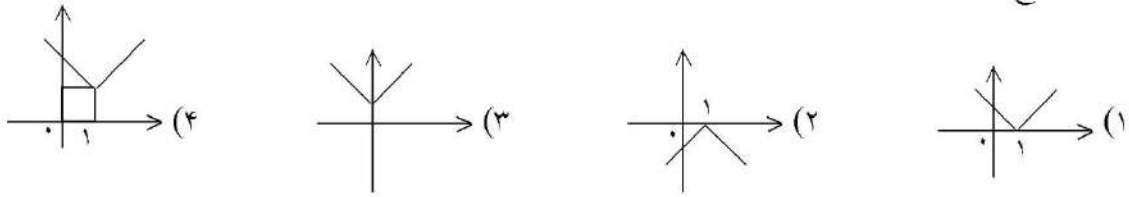
۸۷- کدام رابطه همواره درست نیست؟

- (۱) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (۲) $|a - b| \leq |a| - |b|$ (۳) $|a - b| \geq |a| - |b|$ (۴) $|a - b| \leq |a| + |b|$

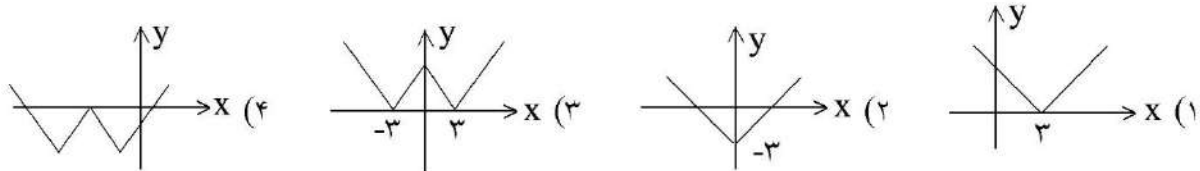
۸۸- مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y = 3 - |x - 1|$ و محور x ها کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۸۹- نمودار تابع $y = |x - 1| + 1$ کدام است؟



۹۰- نمودار $y = ||x| - 3|$ کدام گزینه است؟



۹۱- به ازای کدام مقادیر x نامساوی $|x + 2| \geq 4$ برقرار است؟

- (۱) $x \geq -2$ (۲) $x \leq 2$ (۳) $x \geq 2$ یا $x \leq -6$ (۴) $-6 \leq x \leq 2$

۹۲- اگر $|-x + 1| < 2$ ، آنگاه x در کدام نامساوی صدق می‌کند؟

- (۱) $-3 < x < -1$ (۲) $-3 < x < 1$ (۳) $-1 < x < 3$ (۴) $1 < x < 3$

۹۳- مجموعه جواب نامعادله $|3x + 5| < 2$ کدام است؟

- (۱) $\left\{ x : \frac{-7}{3} < x < -1 \right\}$ (۲) $\left\{ x : \frac{-7}{3} < x < 1 \right\}$
 (۳) $\left\{ x : \frac{-4}{3} < x < 1 \right\}$ (۴) $\left\{ x : \frac{-4}{3} < x < -1 \right\}$

۹۴- مجموعه جواب نامعادله $|2x - 3| \leq 1$ کدام است؟

- (۱) $x \geq 2$ و $x \leq 1$ (۲) $1 < x < 2$ (۳) $1 \leq x \leq 2$ (۴) هیچکدام

۹۵- شرط لازم و کافی برای آنکه نامساوی $(x > 3) \vee (x < -1)$ برقرار باشد آن است که :

- (۱) $|x - 1| > 2$ (۲) $|x + 1| > 1$ (۳) $|x - 1| > 3$ (۴) $|x - 1| < 1$

۹۶- کدام یک از جوابهای زیر در نامعادلات $\begin{cases} 2x + 3 < 0 \\ |2x + 3| < 9 \end{cases}$ صدق می‌کند؟

- (۱) $-6 < x < 2$ (۲) $-6 < x < -\frac{3}{2}$ (۳) $-6 < x$ (۴) $x < -\frac{3}{2}$

۹۷- مجموعه جواب نامساوی $|3x - 1| < 7$ کدام است؟

- (۱) $x \geq -2$ (۲) $-2 < x < \frac{8}{3}$ (۳) $x \geq 3$ (۴) $x < \frac{8}{3}$

۹۸- مجموعه جواب نامعادله $|1 - x| - 1 < 0$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- (۱) دو (۲) سه (۳) یک (۴) هیچ

۹۹- با شرط $|x - 1| < 2$ حاصل عبارت $|x + 1| + |x - 3|$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $2x - 2$ (۳) $4 - 2x$ (۴) ۴

۱۰۰- نامعادله $1 < \left| \frac{2x - 3}{x + 2} \right|$ معادل کدام است؟

- (۱) $|x - 3| < 4$ (۲) $|2x - 3| < 5$ (۳) $|3x - 8| < 7$ (۴) $|3x - 7| < 7$

۱۰۱- مجموعه جواب معادله $1 \leq |2x - 5| \leq 3$ کدام است؟

- (۱) $1 \leq x \leq 2$ یا $3 \leq x \leq 4$ (۲) $-3 \leq x \leq -4$ یا $-1 \leq x \leq -2$
(۳) $-3 \leq x \leq 1$ یا $6 \leq x \leq 8$ (۴) $5 \leq x \leq 7$ یا $-1 \leq x \leq 4$

۱۰۲- مجموعه جواب $2 < |x + 3| + 4 < 2$ کدام است؟

- (۱) $-1 < x < 5$ (۲) $1 < x < 5$ (۳) \emptyset (۴) $-5 < x < -1$

۱۰۳- مجموعه جواب نامعادله $(x + 1)^2 - 1 > 0$ کدام است؟

- (۱) $-1 < x < 1$ (۲) $x > 1$ یا $x < -1$ (۳) $x > 0$ یا $x < -2$ (۴) $-2 < x < 0$

۱۰۴- اگر $|\sin x| + |\cos x| > |\sin x - \cos x|$ باشد، آن گاه انتهای کمان x در کدام ناحیهی مثلثاتی است؟

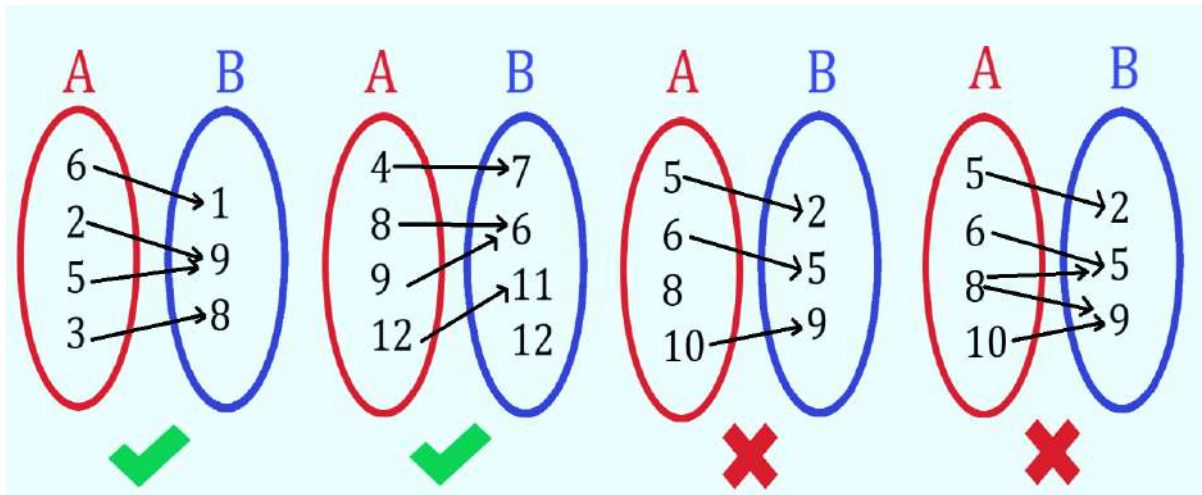
- (۱) اول و دوم (۲) دوم و سوم (۳) اول و سوم (۴) دوم و چهارم

۱۰۵- جای خالی را با عدد یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید.

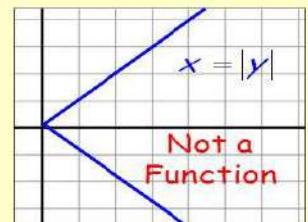
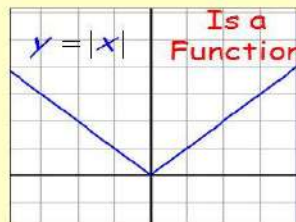
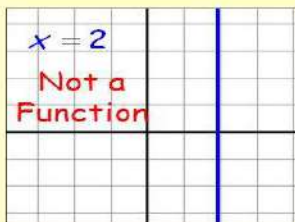
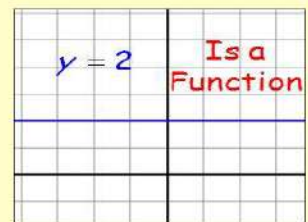
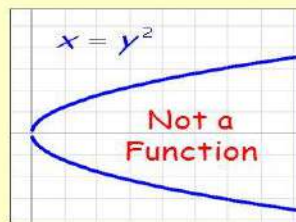
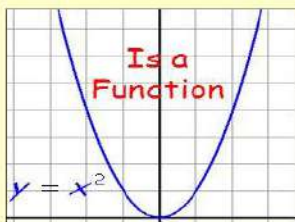
مجموعه‌ی جواب نامعادله $|2x - 1| \leq 7$ بازه‌ی است.

فصل ۵

تابع



Graphs of Relations and Functions



زوج مرتب:

تساوی دو زوج مرتب:

تمرین - در تساوی مقابل مقدارهای x و y را به دست آورید.

$$(3x + 2, y - 1) = (y, x + 5)$$

ضرب دکارتی دو مجموعه $(A \times B)$:

رابطه:

تابع (تابع را به صورت $f(x)$ یا $g(x)$ و یا ... نمایش می دهند).

تابع رابطه ای است که به چهار صورت زیر بررسی می شود:

۱- نمودار پیکانی:

۲- زوج مرتب:

۳- نمودار هندسی:

۴- تعریف ریاضی:

نکته - $f(x)$ همان y است: $y = f(x)$ (به $y = f(x)$ ضابطه تابع، رابطه تابع و یا قانون تابع گفته می شود).

تمرین - با کمک تعریف ریاضی تابع، نشان دهید کدام یک از رابطه های زیر یک تابع است؟

۱) $f(x) = x^2 + 1$

۲) $x^2 + y^2 = 1$

۳) $y = x^3 + 1$

۴) $x + y^2 = 1$

تمرین



- ۱ کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می کند؟ توضیح دهید.
- الف) رابطه‌ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می دهد.
- ب) رابطه‌ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می دهد.
- ج) رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می دهد.
- د) رابطه‌ای که به هر دانش آموز، دوستان او را نسبت می دهد.
- ه) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه‌های دوم آن عدد را نسبت می دهد.
- و) رابطه‌ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می دهد.

- ۲ مجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$ داده شده اند.
- الف) به کمک نمودار بی‌کافی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.
- ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.
- ج) چهار رابطه به دست آمده را به کمک زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.

۳ کدام یک از مجموعه‌های زیر یک تابع است؟

$$f = \{(2, 1), (3, -5), (3, 7)\}$$

$$g = \{(0, 1), (\frac{3}{5}, 1), (-5, 1), (8, 1)\}$$

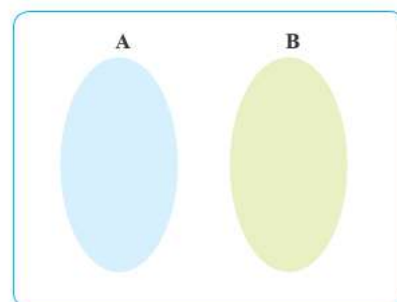
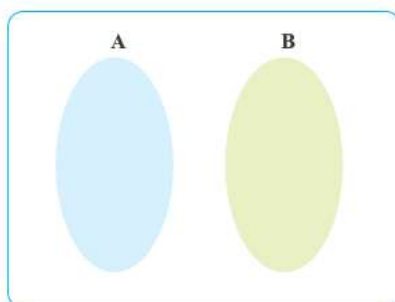
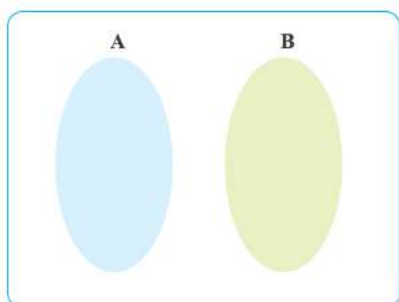
$$h = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\}$$

$$k = \{(2, 5)\}$$

$$r = \{(2, 0), (-7, 0)\}$$

$$l = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots\}$$

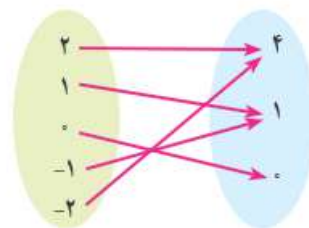
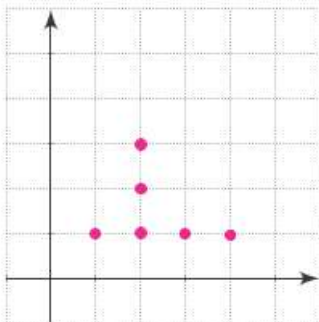
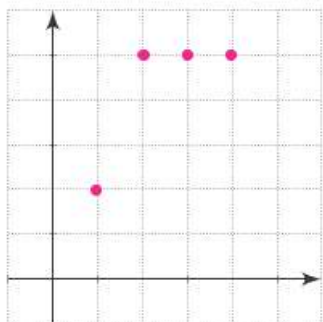
- ۴ A و B مجموعه‌هایی غیر عددی اند، در شکل زیر در A و B اعضای دلخواه بگذارید و یک تابع از A به B به کمک نمودار بی‌کافی ارائه کنید. سعی کنید لااقل سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



مقدار تابع: اگر در $y = f(x)$ ، $x = a$ را قرار دهیم، به $y = f(a)$ مقدار تابع گفته می شود.

تمرین

۱ کدام یک تابع است؟ دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.

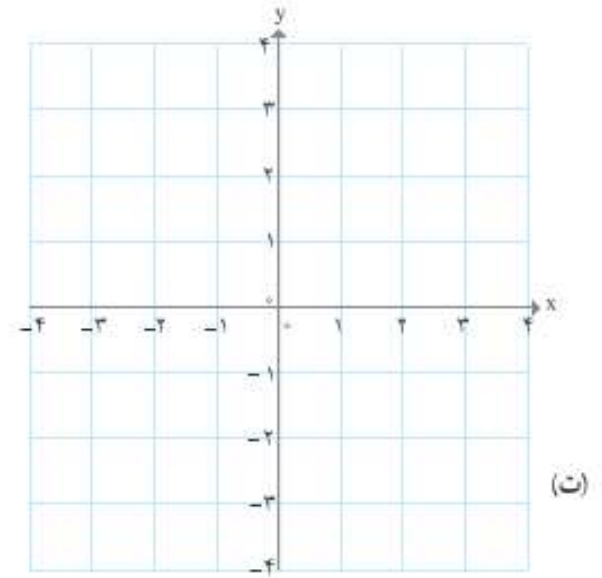
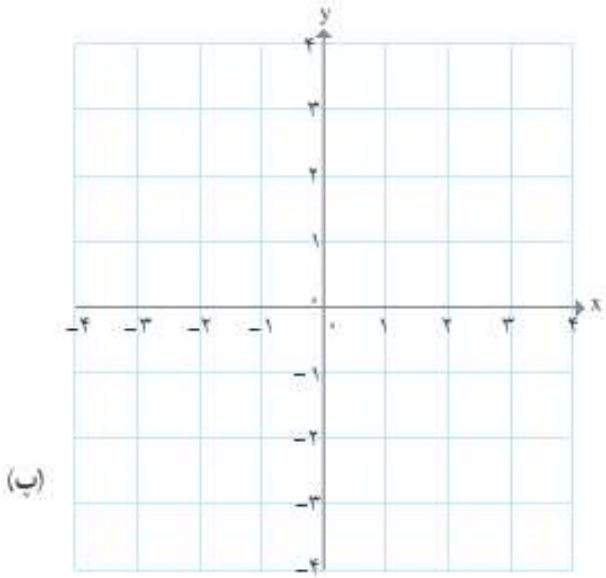
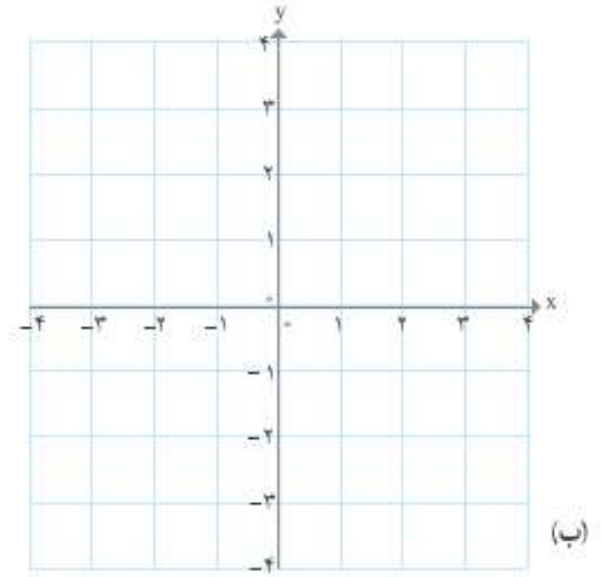
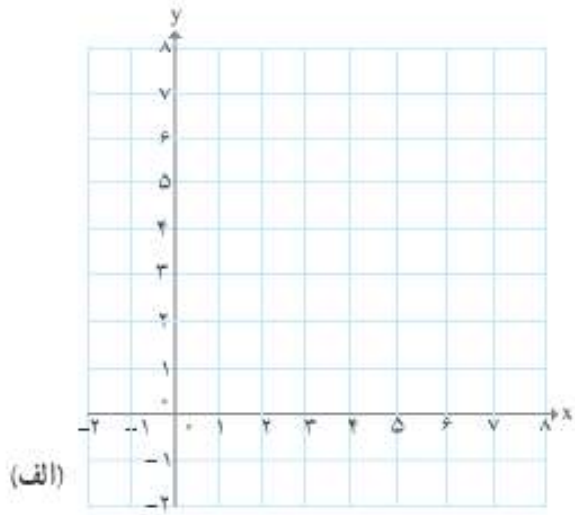


۲ تابعی مثال بزنید که :

- الف) دامنه آن تنها شامل دو عضو باشد.
- ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.
- پ) دامنه آن تنها یک عضو داشته باشد.
- ت) دامنه آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.
- ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

۳ جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده اند، رسم کنید.

	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	$\{1, 2, 3, 4\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی
برد	؟	مجموعه اعداد حقیقی	؟	؟



۴ یک شمع ۲۰ سانتی متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی متر آن می سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)						

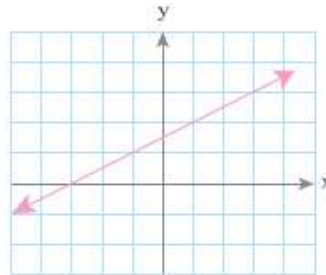
نمودار این تابع را رسم کنید.
چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

۵ آیا خط $x = 2$ را می توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ خط $y = 5$ را چطور؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟

۶ نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنه آن بازه $[-3, 5]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع وجود دارند؟

۷ نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید.

از بین نمایش های مختلفی که برای این تابع می دانید، کدام یک مناسب تر است؟



۸ جدول زیر دمای سنگ ها در عمق های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به دست می دهد. نمودار آن را رسم کنید.

ب) معادله ای برای این تابع به دست آورید.

پ) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیر زمین است، بیابید.

۹ الف) تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ و $f(100)$ و $f(-5)$ و $f(\sqrt{5})$ و $f(-\frac{3}{4})$ را به دست آورید.

ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.

پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنه آن بازه $[-2, 5]$ باشد، نیز رسم کنید.

۱۰ برای یک تابع خطی می‌دانیم که: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

۱۱ آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

۱۲ علی در هر دقیقه پاده روی، مسافت $\frac{1}{10}$ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می‌کند، با $f(t)$ نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می‌دهد؟

الف) $f(t) = t - \frac{1}{10}$

ب) $f(t) = \frac{1}{10}t$

پ) $f(t) = t + \frac{1}{10}$

ت) $f(t) = \frac{1}{10} - t$

۱۳ اگر درباره تابع g داشته باشیم: $g(4) = 3$, $g(-2) = \frac{1}{3}$, $g(1) = 5$, $g(0) = 2$ ؛ g را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

۱۴ برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی‌گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطه $F = \frac{9}{5}C + 32$ به یکدیگر وابسته‌اند.

الف) 20° - درجه سانتی‌گراد، چند درجه فارنهایت است؟

ب) 104° - درجه فارنهایت چند سانتی‌گراد است؟

پ) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را برحسب فارنهایت به دست آورد.

ت) آیا رابطه بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟

۱۵ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.

۱۶ دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

۱۷ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[2, 0]$ و برد آن $[-2, 1]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع می‌توان رسم کرد؟

دامنه و برد برخی از توابع:

۱- تابع ثابت:

۲- تابع همانی:

۳- تابع درجه اول (خطی):

۴- تابع درجه دوم:

۵- توابع کثیرالجزءه:

۶- تابع قدر مطلق $f(x) = |x|$:

۷- تابع قدر مطلق $f(x) = -|x|$:

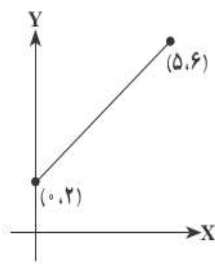
۸- تابع قدر مطلق $f(x) = |x| + k$:

۹- تابع قدر مطلق $f(x) = -|x| + k$

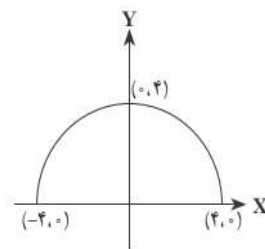
۱۰- تابع چند ضابطه ای (قطعه ای):

تمرین

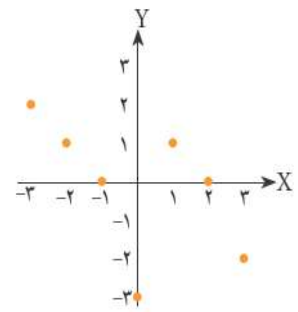
- ۱- تابع $f(x) = 3x - 1$ را که دامنه آن مجموعه $\{5, 0, \frac{1}{3}\}$ است، رسم کنید. برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار بیگانه آن را ارائه دهید. اگر دامنه این تابع \mathbb{R} باشد، پاسخها چگونه خواهد بود؟
- ۲- در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.



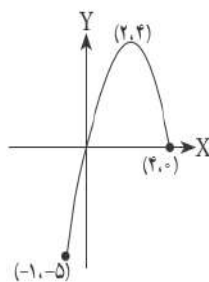
(الف)



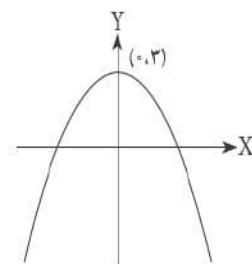
(ب)



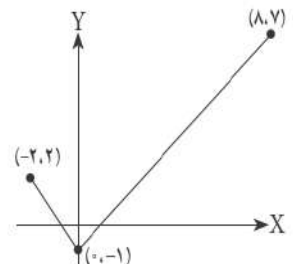
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

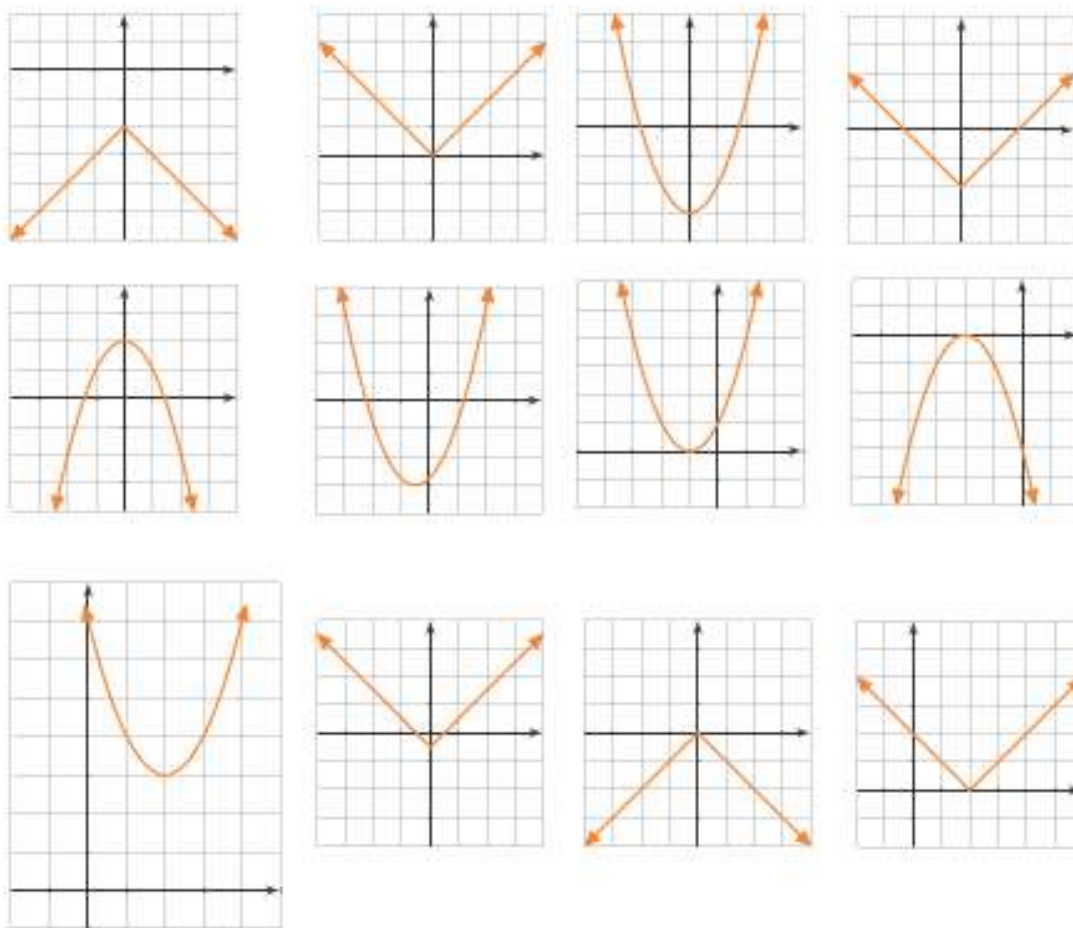
۳ درست یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

- الف) دامنه تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(0, +\infty)$ و بُرد آن نیز $(0, +\infty)$ است.
 ب) دامنه تابع $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ همه اعداد حقیقی و بُرد آن $(2, +\infty)$ است.
 پ) دامنه تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است.

ت) اگر $f(x) = 2x + 1$ آنگاه $f(1) = \frac{f(2)}{2}$.

۴ یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 30 متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

۵ هریک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



الف) $y = x^2 - 3$

ت) $y = (x + 1)^2$

خ) $y = -|x| - 2$

ب) $y = -x^2 + 2$

ج) $y = |x| - \frac{1}{3}$

د) $y = (x - 2)^2 + 3$

پ) $y = |x|$

ز) $y = |x - 2|$

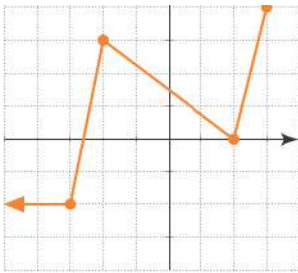
س) $y = |x| - 2$

ث) $y = -|x|$

ح) $y = -(x + 2)^2$

ر) $y = (x + \frac{1}{3})^2 - 3$

۶ فرض کنیم دامنهٔ هر یک از توابع تمرین ۵ به بازه $[-۲, ۳]$ محدود شده باشد. در این صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.



۷ نمودار تابع f داده شده است. ضابطهٔ این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید.

$$f(\sqrt{5}) \quad f(۶) \quad f(۳) \quad f\left(\frac{1}{۲}\right) \quad f(۰) \quad f\left(-\frac{۵}{۲}\right)$$

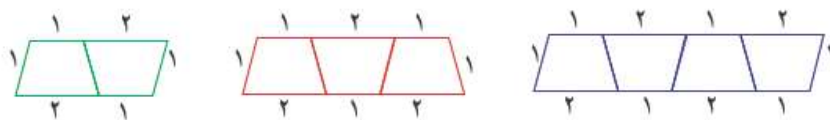
۸ نمودار یک تابع خطی از نقاط $(۰, ۳)$ و $(۴, ۳)$ می‌گذرد. $f(-۱)$ و $f(-۴)$ را به دست آورید.

۹ هزینه مکالمه تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینه آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را برحسب زمان تا پایان زمان ۶ دقیقه رسم کنید.

۱۰ کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x + 2 & x \leq 2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

۱۱ الگوی زیر از تعدادی دوزنقه تشکیل شده است.



الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل						

ب) چرا رابطه بین تعداد دوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید.

۱۲ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(-2, 1)$ و $(3, -2)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

تمرین و تست فصل ۵

۱- به ازای کدام مقدار m رابطه‌ی $\{(3, 4), (m, 1), (3, m+2), (5, m)\}$ یک تابع است؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۲- کدام یک از روابط زیر به ازای $m = -1$ یک تابع است؟
 (۱) $\{(m, 2m), (2m, m), (-1, 3m)\}$ (۲) $\{(m, 2m), (3m, -1), (-1, 3m)\}$
 (۳) $\{(m, 2m), (2m, m), (2m, -2)\}$ (۴) $\{(m, 2m), (2m, m), (3, m)\}$

۳- در تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ ، مقدار $f(4) - f(9)$ برابر کدام است؟
 ۱) -0.2 ۲) -0.1 ۳) 0.1 ۴) 0.2

۴- در تابع $f = \{(2, 3), (3, 1), (4, 2), (1, 4)\}$ ، مقدار $2f(2) - f(4)$ کدام است؟
 ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

۵- فرض کنید که f تابعی باشد بطوری که $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ، $y \in \mathbb{R}$ اگر n عدد طبیعی باشد و $f(1) \neq 0$ آنگاه مقدار $\frac{f(n)}{f(1)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{n^2}$ ۲) $\frac{1}{n}$ ۳) n ۴) n^2

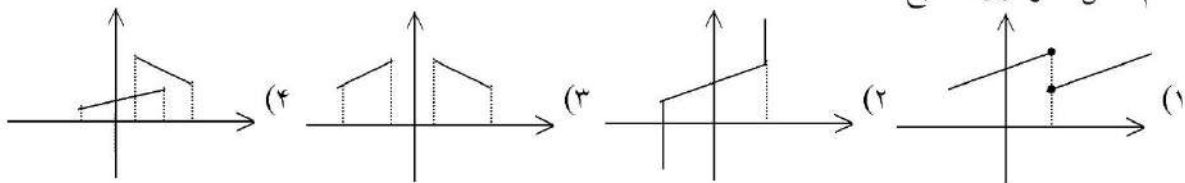
۶- اگر $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x + 2}$ باشد، مقدار $f(2) - f(-2)$ کدام است؟

۱) $\frac{10}{6}$ ۲) $\frac{8}{6}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۷- اگر $f = \{(x, y) | y = 2x^2 + 2ax + 5a^2\}$ ، $f = \{(x, a) | (x, a) \in f\}$ یک مجموعه تک عضوی باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۸- کدام شکل، نمودار یک تابع است؟



۹- اگر $\frac{f(x)}{\cos x} + \frac{f(-x)}{\sin x} = 2$ ، آنگاه $f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۰- مقدار تابع $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ در نقاطی که $x + \frac{1}{x} = 5$ باشد کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۵ (۳) ۲۳ (۴) ۲۱

۱۱- در کدامیک از روابط زیر y تابع x است؟

- (۱) $y^3 + 3y^2 + 3y + x^3 + x = 0$ (۲) $y^2 + 2y = x - 1$
 (۳) $|x| + |y - 1| = 1$ (۴) $|y| + \sqrt{x} = 1$

۱۲- کدام رابطه زیر تابع نیست؟

- (۱) $y^2 = x$ (۲) $y^3 = x$ (۳) $y = \sqrt{x^2}$ (۴) $y = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$

۱۳- اگر $f(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x$ باشد، آنگاه $f(\sqrt[3]{2})$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\sqrt[3]{4}$ (۴) $\sqrt[3]{2}$

۱۴- اگر تابع $f(x) = \sqrt{2x+5} + |x|$ باشد حاصل $f(2) + f(-2)$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۱۵- کدام رابطه یک تابع است؟

- (۱) $y^3 - 3y^2 + x = 0$ (۲) $y + y^3 = x^3 + 1$ (۳) $|y - 1| + x = 0$ (۴) $xy^2 - x = 1$

۱۶- اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ آنگاه $f(x) \times f\left(\frac{-1}{5}\right)$ برابر کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۷- رابطه R با کدام معادله زیر وقتی $x \in Z$ باشد یک تابع است؟

- (۱) $|y| = x - 1$ (۲) $y = |x| + 1$ (۳) $x^2 - y^2 = 1$ (۴) $x^2 + y^2 = 1$

۱۸- اگر $f(x) = 3x - 5$ باشد، حاصل $\frac{f(h+2) - f(2)}{3h}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۹- به ازای کدام مقدار m رابطه $\{(1, 4), (2, 1), (5, 3), (2, m^2), (m, 3)\}$ یک تابع است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۵

۲۰- اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ مقدار $f(4) + f(\frac{1}{4})$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) $\frac{9}{4}$

۲۱- در تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ مقدار $f(1) - f(4)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{1}$

۲۲- در تابع $\{(1, 4), (4, 2), (3, 1), (2, 5)\}$ مقدار $f(2) - 2f(1)$ چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۳- اگر $f(x) = x^3 + 1$ و $g(x) = \sqrt[3]{x} + 2$ باشد، حاصل $2f(-2) + g(-1)$ کدام است؟

- (۱) -۱۳ (۲) ۱۹ (۳) -۶۲ (۴) -۱۱

۲۴- با فرض آنکه $f(x) + f(2) = x^2 + 4$ مقدار $f(-2)$ برابر کدام عدد می‌باشد؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) صفر (۴) ۱۲

۲۵- اگر $f(x) + xf(2) = x^3 + 1$ حاصل $f(-2)$ چقدر است؟

- (۱) -۷ (۲) -۱ (۳) ۹ (۴) ۳

۲۶- کدام ضابطه تابع نمی‌باشد؟

- (۱) $x + |y| = 2$ (۲) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ (۳) $y = \sqrt{-\sin^2 x}$ (۴) $|x| + y^3 = 2$

۲۷- اگر $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{|x+2|}$ و $g(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ باشد، آنگاه حاصل $f(-3) \times g(4)$ برابر است با:

- (۱) ۱۲۶ (۲) ۱۳۶ (۳) ۱۴۰ (۴) صفر

۲۸- در تابع $f(x) = a \sin^2 x + b \sin 2x$ ، اگر $f(\frac{\pi}{4}) = 3$ و $f(\frac{\pi}{2}) = 2$ باشد، مقدار $f(\frac{3\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۲۹- به ازای چند مقدار a رابطه $\{(2, 3a), (2, a^2 + 2), (a, 1)\}$ یک تابع را مشخص می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) بی‌شمار (۴) هیچ

۳۰- اگر $f(x) = \frac{|x^2 - 7|}{2}$ و $g(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$ باشند، آنگاه حاصل $\frac{f(\sqrt{2})}{g(2)}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $-\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{5}{3}$

۳۱- اگر رابطه $R = \{(3, 4b), (2, a-1), (3, b^2+a), (2, 3)\}$ یک تابع باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

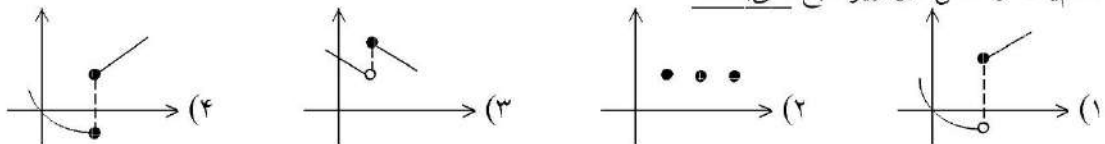
۳۲- کدامیک از روابط زیر تابع نمی‌باشد؟

- (۱) $|y| = -4x^2 + 4x - 1$
 (۲) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 = 0$
 (۳) $y = \sqrt{x^2 - 4} \pm \sqrt{4 - x^2}$
 (۴) $y^2 + 2yx = x - 1$

۳۳- اگر $f(x) + xf(-x) = x^2 + 1$ مقدار $f(2)$ چقدر است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۴- کدامیک از شکل‌های زیر تابع نمی‌باشد؟



۳۵- کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟

- (۱) $|x| + |y^2 - 1| = 0$
 (۲) $|x| - |y| = 0$
 (۳) $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$
 (۴) $x^2 + y^2 - 2x + 3y + \frac{13}{4} = 0$

۳۶- تابع $f(x) = \frac{|x| + 1}{|x|}$ مفروض است. حاصل $f\left(\frac{-2}{3}\right)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۲ (۴) -۱

۳۷- اگر تابع $f = \{(a + b, 1 - a), (3 - b, a - b)\}$ فقط یک عضو داشته باشد، آنگاه:

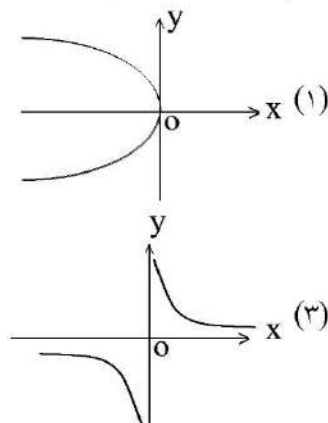
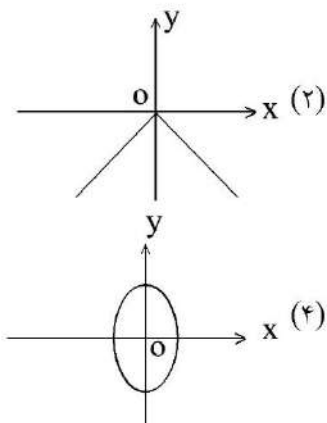
- (۱) $ab = \frac{1}{2}$ (۲) $ab = 1$ (۳) $\frac{a}{b} = 2$ (۴) $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

۳۸- آیا رابطه‌ی R با معادله $|y| = x$ وقتی $x \in Z$ یک تابع است؟

۳۹- آیا رابطه‌ی R با معادله $y^2 = x$ وقتی $x \in Z$ یک تابع است؟

۴۰- آیا رابطه‌ی R با معادله $x^2 + y^2 = 9$ وقتی $x \in Z$ یک تابع است؟

۴۱- کدام یک از اشکال زیر نمودار یک تابع است؟



۴۲- رابطه‌ی زیر در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است. آیا این رابطه یک تابع است؟

$$|y| = |x|$$

۴۳- رابطه‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی تعریف شده است. آیا این رابطه یک تابع است؟

$$y^2 = x^2$$

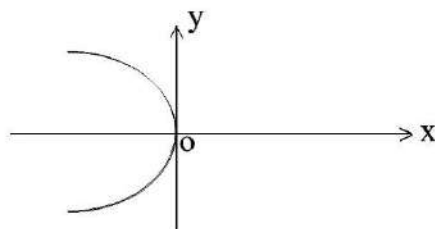
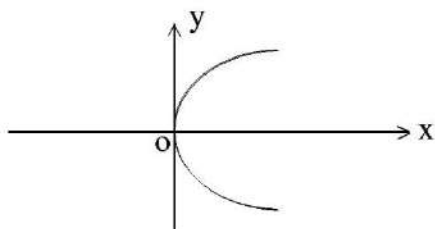
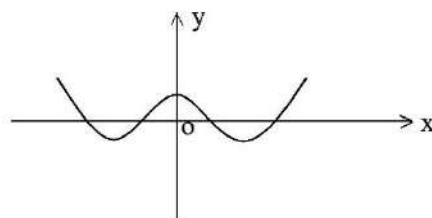
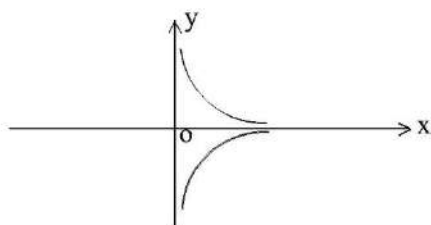
۴۴- رابطه‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی تعریف شده است. آیا این رابطه یک تابع است؟

$$|x| + |y| = 1$$

۴۵- رابطه‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی تعریف شده است. آیا این رابطه یک تابع است؟

$$y^2 = 9$$

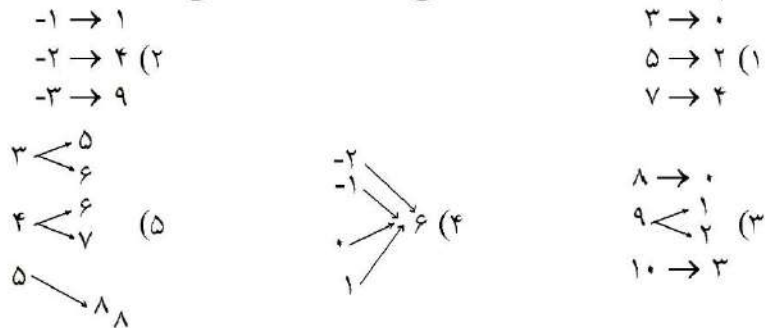
۴۶- کدام یک از نمودارهای زیر نمودار یک تابع است؟



۴۷- عبارت $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ را برای تابع زیر پیدا کنید.

$$f(x) = x^2 - 2x$$

۴۸- کدام یک از تناظرهای زیر یک تابع است. در صورت تابع بودن دامنه و برد و ضابطه‌ی آن را بنویسید.



۴۹- عبارت $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ را برای تابع زیر پیدا کنید.

$$f(x) = \sqrt{x} - 5$$

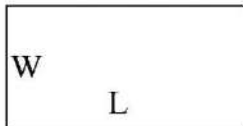
۵۰- عبارت $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ را برای تابع زیر پیدا کنید.

$$f(x) = |x|$$

۵۱- آیا معادله‌ی زیر در اعداد حقیقی می‌تواند ضابطه‌ی یک تابع باشد؟

$$x = y^2$$

۵۲- در شکل زیر مساحت مستطیل به طول L و عرض W ، ۲۵ مترمربع است. تابعی بنویسید که محیط مستطیل را به عرض آن وابسته کند سپس دامنه‌ی تابع را تعیین کنید بار دیگر این عمل را برای حالتی که محیط را به طول مستطیل وابسته می‌کند انجام دهید.



۵۳- مجموع دو عدد مثبت ۵۰۰ است اگر یکی از اعداد x باشد تابعی بنویسید که حاصل ضرب آن دو عدد را به x وابسته کند.

۵۴- اگر مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع S باشد تابعی بنویسید که S را به ضلع مثلث وابسته کند.

۵۵- اگر $f(x) = \left(\frac{9}{x} + x^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}$ مقدار $f\left(\frac{8}{3}\right)$ کدام است؟

- $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

$$\begin{cases} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y^3 + 2y + 1 + x = 0 \end{cases}$$

۵۶- آیا ضابطه‌ی زیر ضابطه‌ی یک تابع است؟

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ x^2 + y^2 = 26 \end{cases}$$

۵۷- آیا ضابطه‌ی زیر ضابطه‌ی یک تابع است؟

$$y = \sqrt{x-2} \pm \sqrt{3-x}$$

۵۸- آیا رابطه‌ی مقابل تابع است؟

x	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{3}{2}$	۲	۳	۵

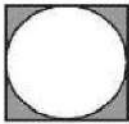
۵۹- با توجه به جدول مقابل، ضابطه‌ی تابع کدام است؟

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad (۲) \quad y = \frac{x^2}{2} + 2 \quad (۱)$$

$$y = 2^x + 1 \quad (۴) \quad y = x^3 - 1 \quad (۳)$$

۶۰- مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۴ سانتی‌متر مربع است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع آن (x) به دست آورید.

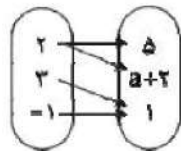
۶۱- در شکل زیر مساحت قسمت‌های هاشورخورده به عنوان تابعی از محیط دایره (P) کدام است؟



$$\frac{P^2}{\pi} \left(\frac{4}{\pi} - \frac{1}{4} \right) \quad (۲) \quad \frac{P^2}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \quad (۱)$$

$$\frac{P^2}{\pi} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} \right) \quad (۴) \quad \frac{P^2}{\pi} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \quad (۳)$$

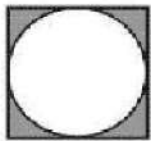
تابع g به صورت



و تابع f به صورت $g = \{(3, -1), (a, b+1), (a+1, 2)\}$ باشند، مقدار a + b چه قدر است؟

$$۲ \quad (۴) \quad -۲ \quad (۳) \quad -۱ \quad (۲) \quad ۱ \quad (۱)$$

۶۲- هرگاه نمودار وِن تابع f به صورت



۶۳- در شکل زیر، مساحت قسمت‌های هاشورخورده به عنوان تابعی از محیط دایره (P)، کدام است؟

$$\frac{P^2}{\pi} \left(\frac{4}{\pi} - \frac{1}{4} \right) \quad (۲)$$

$$\frac{P^2}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \quad (۱)$$

$$\frac{P^2}{\pi} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} \right) \quad (۴)$$

$$\frac{P^2}{\pi} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \quad (۳)$$

۶۴- یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۱۸ متر باشد، حجم تانکر به صورت تابعی از r کدام است؟ (شعاع نیم کره و شعاع قاعده‌ی استوانه برابر است.)

$$v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 9\pi r^2 \quad (۲) \qquad v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 18\pi r^2 \quad (۱)$$

$$v(r) = \frac{8}{3}\pi r^3 + 9\pi r^2 \quad (۴) \qquad v(r) = \frac{8}{3}\pi r^3 + 18\pi r^2 \quad (۳)$$

۶۵- دوچرخه‌سواری در یک مسیر مستقیم با سرعت ثابت حرکت خود را آغاز می‌کند. $\frac{4}{5}$ ساعت بعد موتورسواری در همان مسیر با سرعتی ثابت که ۲۲ کیلومتر بر ساعت بیشتر از دوچرخه‌سوار است، حرکت خود را آغاز می‌کند و بعد از ۸ ساعت از شروع حرکتش به اندازه‌ی y کیلومتر از دوچرخه‌سوار جلو می‌افتد. تابع y بر حسب سرعت دوچرخه‌سوار (x) کدام است؟ (x بر حسب کیلومتر بر ساعت است.)

$$y = 99 + 20/5x \quad (۱) \quad y = 176 + 20/5x \quad (۲) \quad y = 99 - 4/5x \quad (۳) \quad y = 176 - 4/5x \quad (۴)$$

۶۶- دامنه تعریف تابع $y = \sqrt{4x - x^2}$ کدام است؟

$$0 < x < 4 \quad (۱) \quad 0 < x < 2 \quad (۲) \quad x \geq 4 \quad (۳) \quad x \leq 0 \quad (۴)$$

۶۷- دامنه تعریف تابع $y = \sqrt{2 - x^2}$ کدام است؟

$$x \leq -\sqrt{2} \text{ و } x \geq \sqrt{2} \quad (۱) \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \quad (۲) \quad x = 0 \quad (۳) \quad \text{هیچکدام} \quad (۴)$$

۶۸- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{|x| - 1}$ کدام است؟

$$R \quad (۱) \quad [0, +\infty[- \{1\} \quad (۲) \quad R - \{1\} \quad (۳) \quad]-1, 1[\quad (۴)$$

۶۹- دامنه تعریف تابع $y = \sqrt{x(x-2)}$ برابر کدام یک از فواصل زیر است؟

$$(-\infty, 0) \cup [2, +\infty) \quad (۴) \quad [0, +\infty) \quad (۲) \quad (-\infty, 0) \cup [2, +\infty) \cup [0, 2] \quad (۳) \quad [0, +\infty) \cup [2, +\infty) \quad (۱)$$

۷۰- دامنه‌ی تابع $f: Z \rightarrow R$ $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}$ شامل چند عضو است؟

$$۲ \quad (۱) \quad ۳ \quad (۲) \quad ۴ \quad (۳) \quad \text{بی شمار} \quad (۴)$$

۷۱- اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{4x^2 - 2x}$ به صورت $D_f = \mathbb{R} - A$ باشد، مجموعه‌ی A شامل چند عضو است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۷۲- در دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{2x^2 - x}{3x^3 - 4x^2 - 4x}$ چند عدد صحیح وجود ندارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) تمام اعداد صحیح، در دامنه می‌باشند.

۷۳- با فرض اینکه دامنه‌ی تعریف $f(x)$ فاصله‌ی $(-\infty, +\infty)$ باشد، دامنه‌ی تعریف $f(3x)$ کدام است؟

۱ (۱) $(-\infty, +\infty)$ ۲ (۲) $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ ۳ (۳) $(-\frac{1}{4}, +\infty)$ ۴ (۴) $(-\frac{2}{3}, +\infty)$

۷۴- مجموعه‌ی دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x - 1}$ در فاصله‌ی $[-2, 10]$ چند عضو صحیح دارد؟

۱۰ (۴) ۹ (۳) ۱۲ (۲) ۱۳ (۱)

۷۵- اگر $D_f = [1, +\infty)$ باشد دامنه تابع $f(\frac{1}{x})$ برابر است با:

۱ (۱) $[1, +\infty)$ ۲ (۲) $(0, 1)$ ۳ (۳) $(1, +\infty)$ ۴ (۴) $(0, 1]$

۷۶- تابع $y = \frac{2x - 1}{x^2 + kx + 1}$ به ازای کدام مقدار k همواره معین است؟

۱ (۱) $k = 10$ ۲ (۲) $k = 5$ ۳ (۳) $k = -3$ ۴ (۴) $k = \frac{1}{4}$

۷۷- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x(x-1)}}{\sqrt{(x+3)(2-x)}}$ و $x \in \mathbb{Z}$ باشد، برد $f(x)$ چند عضو دارد؟

۱ (۱) ۳ ۲ (۲) ۴ ۳ (۳) ۵ ۴ (۴) ۶

۷۸- دامنه‌ی تابع حقیقی زیر را در صورت امکان با استفاده از نماد بازه‌ها پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < -5 \\ \sqrt{25 - x^2} & -5 \leq x \leq 5 \\ 3 - x & x > 5 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{و} & -3 < x \leq 2 \\ 3x - 4 & \text{و} & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

۷۹- دامنه‌ی تابع داده شده را به صورت فاصله بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{و } x \geq 2 \\ 3x & \text{و } x < 0 \end{cases}$$

۸۰- دامنه‌ی تابع داده شده را به صورت فاصله بنویسید.

۸۱- دامنه و برد توابع زیر را پیدا کنید:

$$f(x) = 1 + x^2 \quad (\text{الف}) \quad f(x) = (1+x)^2 \quad (\text{ب})$$

۸۲- دامنه‌ی تابع: مجموعه مقادارهایی است که یک متغیر مستقل می‌تواند داشته‌باشد. برد تابع: مجموعه مقادارهایی است که یک متغیر وابسته می‌تواند داشته‌باشد.

۸۳- الف) دامنه‌ی توابع خطی: اگر تابعی به صورت $y = ax^n + bx^{n-1} + \dots$ باشد ($n \in \mathbb{N}$) یعنی متغیر در مخرج یا زیر رادیکال نباشد، آن را خطی می‌نامند. دامنه‌ی این تابع $D_f = \mathbb{R}$ می‌باشد که منظور از \mathbb{R} مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

$$D_f = \mathbb{R} \Leftarrow f(x) = 3x^2 - 5x + 4 \quad (\text{الف})$$

$$D_f = \mathbb{R} \Leftarrow f(x) = \frac{5x-3}{2} \quad (\text{ب})$$

۸۴- ب) دامنه‌ی توابع کسری: اگر متغیر در مخرج باشد، آن تابع را کسری گویند و دامنه‌ی این توابع عبارت است از: $D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ منظور از ریشه‌های مخرج، آن اعدادی می‌باشند که اگر به‌جای متغیر در مخرج قرار گیرند، حاصل صفر می‌شود.

۸۵- تابع رادیکالی: اگر متغیر در زیر رادیکال باشد آن تابع را رادیکالی نامند.

الف) اگر فرجه‌ی رادیکالی فرد باشد، در آن صورت فرض می‌کنیم، رادیکال وجود ندارد، پس دامنه‌ی عبارت زیر رادیکال را به دست می‌آوریم.

۸۶- ب) اگر تابع رادیکالی دارای فرجه‌ی زوج باشد، در آن صورت عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

نکته: اگر عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج، درجه‌ی ۲ یا کسری باشد، باید تعیین علامت کنیم.

۸۷- نکته: در نامعادلات اگر طرفین را بر عددی منفی تقسیم کنیم (ضرب) جهت نامعادله عوض می‌شود.

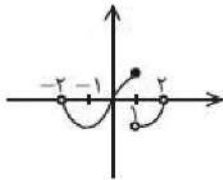
نکته: اگر عبارت رادیکالی با فرجه‌ی زوج در مخرج باشد، برای یافتن دامنه، فقط عبارت مخرج را بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

۸۸- اگر دامنه‌ی $f(x)$ برابر $D_f = [-2, 6]$ باشد، دامنه‌ی $f(2x+1)$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$4 \quad (1) \quad 17 \quad (2) \quad 9 \quad (3) \quad 25 \quad (4)$$

۸۹- کم‌ترین مقدار تابع $y = 3 + \sqrt{x+4}$ کدام است؟

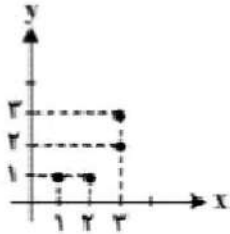
$$2 \quad (4) \quad 5 \quad (3) \quad 7 \quad (2) \quad 3 \quad (1)$$



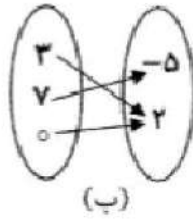
۹۰- نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{(x^2 - 1)}f(x)$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 0] \cup \{1\}$
 (۲) $[-1, 0]$
 (۳) $[-1, 1]$
 (۴) $(-2, 0] \cup [1, 2)$

۹۱- با در نظر گرفتن رابطه‌های زیر، کدام گزینه دامنه‌ی یک تابع را نمایش می‌دهد؟



(الف)



(ب)

x	۲	۰	-۱
y	-۲	۰	۱

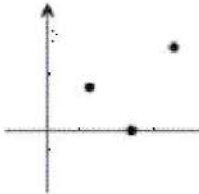
(ج)

$$\{(-1, 1), (2, 3), (-1, 1), (3, 2)\}$$

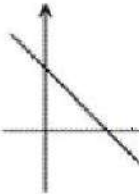
(د)

- (۱) $\{-5, 2\}$ (۲) $\{1, 2, 3\}$ (۳) $\{-1, 2, 3\}$ (۴) $\{2, 0, 1\}$

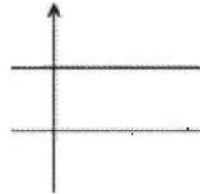
۹۲- در نمودارهای زیر، برد کدام تابع تک عضوی است؟



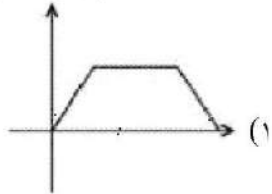
(۴)



(۳)



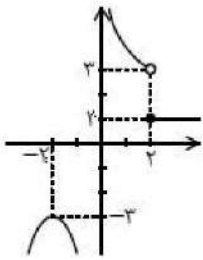
(۲)



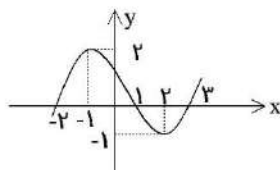
(۱)

۹۳- برد تابع مقابل کدام گزینه است؟

- (۱) $R - [-3, 3)$
 (۲) $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$
 (۳) $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
 (۴) $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty) - (1, 3]$

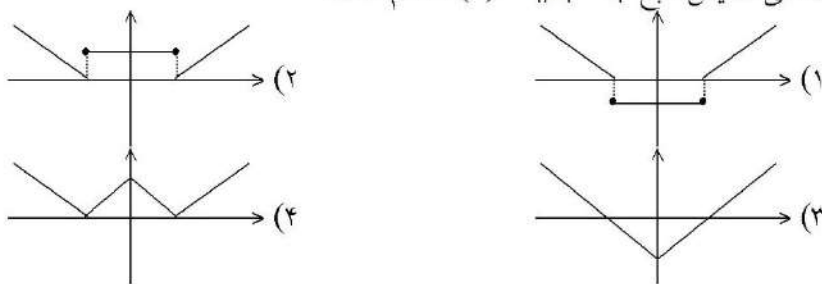


۹۴- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد $f(-1)$ چقدر است؟



- (۱) ۲
 (۲) ۱
 (۳) صفر
 (۴) -۲

۹۵- منحنی نمایش تابع $f(x) = ||x| - ۲|$ کدام است؟



۹۶- نمودار کدام تابع با ضابطه‌های زیر در فاصله‌ی $[۱, ۳]$ بالای سایرین قرار می‌گیرد؟

$y = x^3$ (۴) $y = x^2$ (۳) $y = x^{\frac{2}{3}}$ (۲) $y = x^{\frac{1}{3}}$ (۱)

۹۷- «کدام نمودار» در سمت چپ و پایین سایر نمودارها قرار می‌گیرد؟

$y = (x + ۱)^2 - ۲$ (۴) $y = (x - ۳)^2 + ۴$ (۳) $y = (x - ۱)^2 + ۴$ (۲) $y = (x + ۴)^2 - ۳$ (۱)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $y = -|۲x|$

۹۸- با استفاده از انتقال تابع، نمودار زیر را رسم کنید.

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $y = -|x - ۲|$

۹۹- با استفاده از انتقال تابع، نمودار زیر را رسم کنید.

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $y = -|x + ۲|$

۱۰۰- با استفاده از انتقال تابع، نمودار زیر را رسم کنید.

$t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $y = -|x| + ۲$

۱۰۱- با استفاده از انتقال تابع، نمودار زیر را رسم کنید.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $y = -|x| - ۳$

۱۰۲- با استفاده از انتقال تابع، نمودار زیر را رسم کنید.

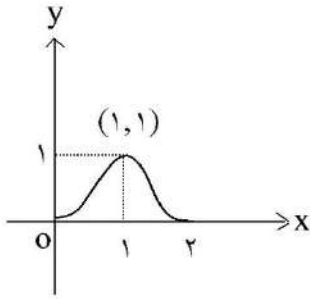
$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $y = -|x - ۲| - ۳$

۱۰۳- با استفاده از انتقال تابع، نمودار زیر را رسم کنید.

$g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $y = |۲x - ۳|$

۱۰۴- با استفاده از انتقال تابع، نمودار زیر را رسم کنید.

نمودار تابع معین f با دامنه $[0, 2]$ و برد $[0, 1]$ در شکل مقابل نشان داده شده است. (به ۱۰ سوال بعدی پاسخ دهید)



۱۰۵- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$$f(x) + 2$$

۱۰۶- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$$f(x) - 1$$

۱۰۷- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$$2f(x)$$

۱۰۸- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$$-f(x)$$

۱۰۹- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$$f(x + 2)$$

۱۱۰- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$$f(x - 1)$$

۱۱۱- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$$f(2x)$$

۱۱۲- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

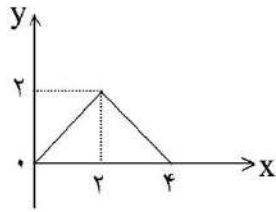
$$f(-x)$$

۱۱۳- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

$$f\left(\frac{x}{2}\right)$$

۱۱۴- نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

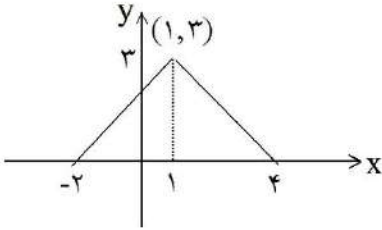
$$f(-2x)$$



۱۱۵- نمودار تابع f با ضابطه $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است:
نمودار توابع $y = f(x + 2)$ و $y = -2f(x) + 1$ را به کمک انتقال
رسم نموده و دامنه و برد هر یک را تعیین کنید.

۱۱۶- نمودار تابع $y = 2f(x) - 3$ را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

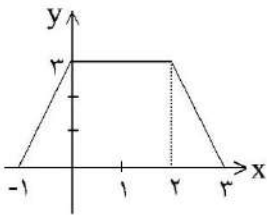
با توجه به نمودار تابع معین f با دامنه $[-2, 4]$ و برد $[0, 3]$ به ۲ سوال بعدی پاسخ دهید:



۱۱۷- نمودار تابع $f(2x) + 1$ را رسم کنید.

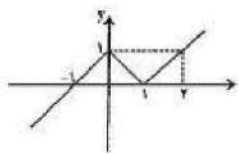
۱۱۸- دامنه و برد آن را تعیین کنید.

نمودار تابع معین f در زیر داده شده است. به ۲ سؤال بعدی پاسخ دهید:

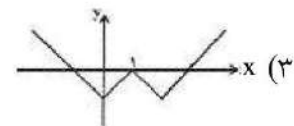
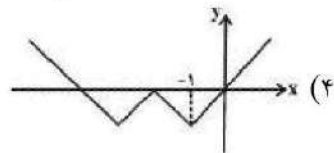
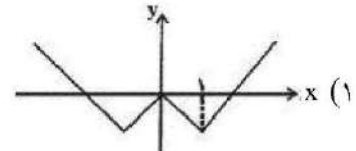
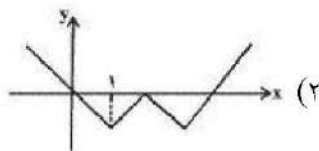


۱۱۹- دامنه و برد f را تعیین کنید.

۱۲۰- نمودار تابع $f(x - 2) + 1$ را به کمک انتقال، رسم نموده، سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.



۱۲۱- نمودار تابع f به صورت زیر می باشد، نمودار تابع $y = |f(-x + 2)| - 1$ کدام است؟



۱۲۲- اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ مقدار عددی $f(4) + f(-4)$ چقدر است؟

- (۱) -۸ (۲) صفر (۳) ۴ (۴) ۸

۱۲۳- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2x + 3 & x < 1 \end{cases}$ باشد، آنگاه $ff(0)$ چقدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۲۶

۱۲۴- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x \geq 2 \\ x + 1 & x < 2 \end{cases}$ باشد، حاصل کدام عبارت ۲، نمی‌باشد؟

- (۱) $fof(2)$ (۲) $f(2) + 1$ (۳) $f(1) + 1$ (۴) $fofof(1)$

۱۲۵- به ازای کدام مقدار a رابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & x \geq 1 \\ a^2 - 4a + x & x \leq 1 \end{cases}$ یک تابع است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) ۱

۱۲۶- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 3 \\ 3 - 5x & x < 3 \end{cases}$ باشد، $f(f(-2))$ کدام است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۶ (۳) ۲۸ (۴) ۲۵

۱۲۷- به ازای چه مقدار m رابطه‌ی روبرو بیانگر یک تابع است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 3 \\ 4x + m & x \leq 3 \end{cases}$$

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۴ (۴) -۳

۱۲۸- در تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ 5x^2 & x < 0 \end{cases}$ مقدار $f(1 - \sqrt{5}) + f(\sqrt{5})$ کدام است؟

- (۱) $30 + 5\sqrt{5}$ (۲) $30 + \sqrt{5}$ (۳) $30 - 5\sqrt{5}$ (۴) $30 - \sqrt{5}$

۱۲۹- اگر $f(x) = \begin{cases} 2 - x & x > 1 \\ x^2 + 3 & x \leq 1 \end{cases}$ باشد، حاصل $f(f(2))$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۵ (۴) صفر

۱۳۰- برای تابع $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & x < 0 \\ x + 4 & x \geq 0 \end{cases}$ ، $f(-2)$ و $f(-1)$ و $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$ را محاسبه کنید و در یک

جدول مرتب نمایید.

۱۳۱- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & x < 0 \\ x + 2 & x \geq 0 \end{cases}$ را رسم کنید.

۱۳۲- آیا معادله‌ی زیر در اعداد حقیقی می‌تواند ضابطه‌ی یک تابع باشد؟

$$y = \begin{cases} 2x + 1 & x > 2 \\ x - 1 & x < 3 \end{cases}$$

۱۳۳- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ x + 1 & x < 0 \end{cases}$ را در دستگاه مختصات رسم نمایید.

۱۳۴- دامنه‌ی تابع $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < -1 \\ x^2 & x \geq -1 \end{cases}$ را مشخص نموده و نمودار آن را رسم کنید و سپس حاصل $f(f(-2))$ را بدست آورید.

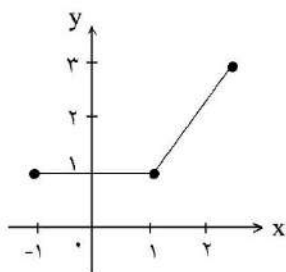
$$g(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x \geq 1 \\ x + 2 & x < 2 \end{cases}$$

۱۳۵- آیا رابطه‌ی مقابل تابع است؟

۱۳۶- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x \notin Z \\ 0 & x \in Z \end{cases}$ را رسم کنید.

۱۳۷- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ -2 & 0 < x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید.

۱۳۸- ضابطه‌ی تابع f که نمودار آن در زیر آمده است را بیابید.



۱۳۹- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 1 \\ 2x + 3 & 1 < x \leq 2 \\ 3x + 5 & x > 2 \end{cases}$ حاصل مقادیر

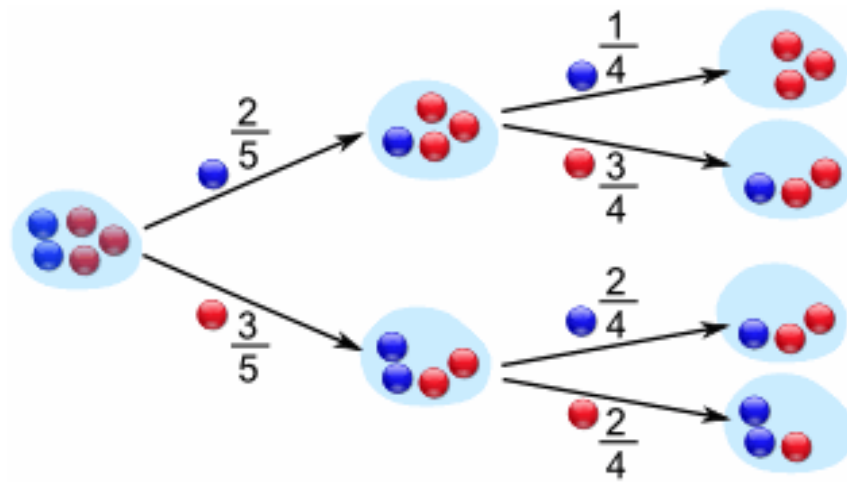
$$f(\sqrt{2} - 1) + f(2\sqrt{2} - 1) - f(3\sqrt{2} - 1)$$

کدام است؟

(۱) $-4\sqrt{2} - 1$ (۲) $2\sqrt{2} - 1$ (۳) $26\sqrt{2} + 5$ (۴) $26\sqrt{2} - 5$

فصل ۶

شمارش، بدون شمردن



تعداد حالت های ممکن برای پرتاب یک سکه: $S = \{پ, ر\} \Rightarrow n(S) = ۲$

تعداد حالت های ممکن برای پرتاب دو سکه با هم یا پرتاب دو بار یک سکه: $n(S) = ۲^۲ = ۴$

$$S = \{(پ, پ), (پ, ر), (ر, پ), (ر, ر)\}$$

تعداد حالت های ممکن برای پرتاب n سکه با هم یا پرتاب n بار یک سکه: $n(S) = ۲^n$

تعداد حالت های ممکن برای پرتاب یک تاس: $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \Rightarrow n(S) = ۶$

تمرین - یک تاس را یک بار پرتاب می کنیم مطلوبست زیر مجموعه ای از آن که عددی اول بیاید.

تعداد حالت های ممکن برای پرتاب دو تاس با هم یا پرتاب دو بار یک تاس: $n(S) = ۶^۲ = ۳۶$

تعداد حالت های ممکن برای پرتاب n تاس با هم یا پرتاب n بار یک تاس:

$$n(S) = ۶^n$$

تعداد حالت های ممکن با آزمایشات متعدد و مختلف: اگر یک آزمایش تصادفی شامل k_1 آزمایش تصادفی α_1 بار، k_2 آزمایش تصادفی α_2 بار، k_3 آزمایش تصادفی α_3 بار و ... k_m آزمایش تصادفی α_m بار باشد، تعداد عضوهای فضای نمونه ای از رابطه زیر به دست می آید:

$$n(S) = k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} k_3^{\alpha_3} \dots k_n^{\alpha_n}$$

تمرین - یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم مطلوبست:

الف - تعداد حالت های ممکن.

ب - تمام حالات ممکن را بنویسی.

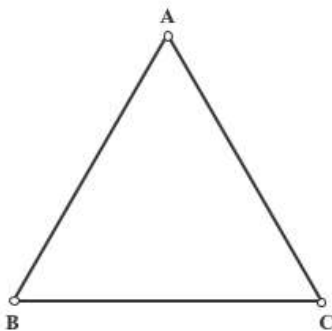
تمرین - سه سکه و دو تاس را با هم پرتاب می کنیم مجموعه حالات ممکن چند عضو دارد؟

۱) تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به دست آورید.
 مشخص کنید برای این کار از اصل جمع استفاده می‌شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.
 الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.
 ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینه اول یک عدد و گزینه دوم یک حرف الفبای فارسی است.
 پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینه دیگر یک حرف الفبای فارسی است.

ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی‌اند.
 ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینه اول اعداد غیرتکراری و دو گزینه دوم حروف انگلیسی غیرتکراری‌اند.

۲) در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه‌هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟

۳) می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.



الف) به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟
 ب) به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد، به گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم وصل‌اند، هم رنگ نباشند.
 پ) هر دو قسمت الف) و ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم، بررسی کنید.

۴ با پلاک‌هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعه A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعه B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه C انتخاب شود، چند ماشین را می‌توان شماره گذاری کرد؟



$$A = \{11, 22, \dots, 99\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$C = \{ب, ج, د, ص, س, د, ج, ب\}$$

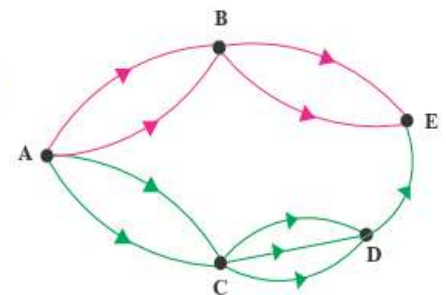
۵ در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می‌شود.



الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می‌شود؟
ب) اگر یکی از رنگ‌های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می‌شود؟
پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می‌شود؟

۶ یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:
الف) اگر مجبور باشد به همه سؤال‌ها جواب دهد؟
ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

۷ اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟



۸ مسئله زیر را به گونه ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.

مسئله : چند عدد دورقمی زوج می توان نوشت؛ به طوری که؟

حل : تعداد راه های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست . لذا با توجه به اصل ضرب 2^0 عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

۹ مسئله ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هر دو ی آنها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد.

$$2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 35$$

نکته ۱- اگر تعداد حالت های ممکن، جایگشت n شی بدون تکرار باشد مساله را از روش خانه حالات حل می نماییم و یا از

$$n(S) = n! \quad \text{رابطه زیر استفاده می کنیم:}$$

تمرین - با اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد زوج ۴ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت.

نکته ۲- اگر تعداد حالت های ممکن، جایگشت n شی با تکرار باشد مساله را از روش خانه حالات حل می نماییم و یا از

$$n(S) = n^n \quad \text{رابطه زیر استفاده می کنیم:}$$

تمرین - با اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد زوج ۴ رقمی با تکرار ارقام می توان نوشت.

نکته ۳- اگر مساله به صورت ترتیب باشد مساله را از روش خانه حالات حل می نماییم و یا از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$p_n^r = p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (r \leq n)$$

تمرین - چند عدد ۵ رقمی که رقم اول و آخرشان فرد و بقیه ارقام آنها زوج است می توان نوشت.

تمرین - با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ عددهای سه رقمی بدون تکرار می سازیم.

مطلوب است تعداد عددها در هر یک از حالت های زیر:

الف - فرد باشند.

ب - زوج باشند.

ج - بزرگتر یا مساوی ۳۰۰ باشد.

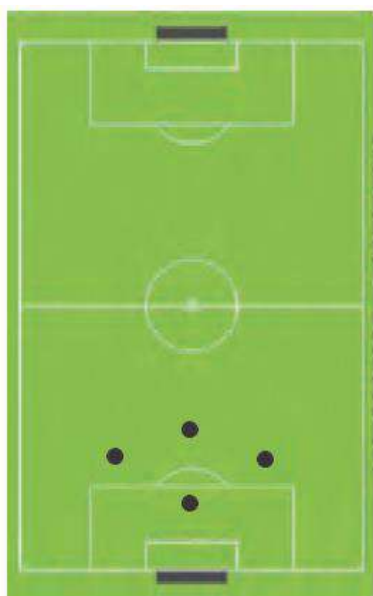
تمرین - با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ عددهای سه رقمی با تکرار می سازیم.

مطلوب است تعداد عددها در هر یک از حالت های زیر:

الف - فرد باشند.

ب - زوج باشند.

ج - بزرگتر یا مساوی ۳۰۰ باشند.



تمرین

۱ در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم های اول تا سوم به چند حالت مختلف می توانند مشخص شوند؟

۲ از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه ای بچینیم. اگر تعداد حالت های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب ها چند تا است؟

۳ کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$$6! = 3! + 3!$$

$$6! = 6 \times 5!$$

$$8! = 4! \times 2!$$

$$2 \times 3! = 6!$$

$$(3!)^2 = 9!$$

$$4! = \frac{8!}{2!}$$

۴ در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

۵ با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها با «گل» شروع می شود؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت؟

پ) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

ت) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

ث) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

نکته ۴- اگر مساله به صورت ترکیب باشد از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (r \leq n)$$

تمرین - از میان ۵ لامپ سالم و ۳ لامپ خراب ۳ لامپ به تصادف انتخاب می کنیم.

مطلوب است تعداد لامپ ها در هر یک از حالت های زیر:

الف- هر ۳ لامپ سالم باشند.

ب- فقط ۲ لامپ سالم باشند.

ج- لااقل ۲ لامپ سالم باشند.

د- حداکثر ۲ لامپ خراب باشند.

ه- فقط ۲ لامپ سالم یا ۱ لامپ خراب باشند.

نکته ۵- تعداد عددهایی که از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ بر عدد k بخش پذیر اند از رابطه زیر به دست می آید:
($k \in S$)

$$A = \left\{ km \mid 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \right\} \Rightarrow n(A) = \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \quad ([] \text{ نماد جز صحیح است})$$

جز صحیح است: در عددهای اعشاری مثبت، جز اعشاری را حذف می‌کنیم و جز صحیح را می‌نویسیم.

مثال: $[۱/۰۰۱] =$ $[۰/۱۲] =$ $[۴/۲] =$

تمرین - از مجموعه $S = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰۰۰\}$ چند عدد می‌توان نوشت که بر ۷ بخشپذیر باشند.

نکته ۶- تعداد عددهای دو رقمی از مجموعه $S = \{۱, ۲, ۳, \dots, m\}$ که بر عدد k بخشپذیراند از رابطه زیر به دست

می‌آید: $(k \in S)$

$$A = \left\{ km \mid ۱ \leq m \leq \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \right\} \Rightarrow n(A) = \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{۹}{k} \right\rfloor \quad ([] \text{ نماد جز صحیح است})$$

تمرین - از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰۰۰\}$ چند عدد دو رقمی می‌توان نوشت که بر ۷ بخشپذیر باشند.

نکته ۷- تعداد عددهای سه رقمی از مجموعه $S = \{۱, ۲, ۳, \dots, m\}$ که بر عدد k بخشپذیراند از رابطه زیر به دست می

آید: $(k \in S)$

$$A = \left\{ km \mid ۱ \leq m \leq \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \right\} \Rightarrow n(A) = \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{۹۹}{k} \right\rfloor \quad ([] \text{ نماد جز صحیح است})$$

تمرین - از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰۰۰\}$ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت که بر ۷ بخشپذیر باشند.

نکته ۸- تعداد عددهای p رقمی از مجموعه $S = \{۱, ۲, ۳, \dots, m\}$ که بر عدد k بخشپذیراند از رابطه زیر به دست می

آید: $(k \in S)$

$$A = \left\{ km \mid ۱ \leq m \leq \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \right\} \Rightarrow n(A) = \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\overbrace{۹۹۹ \dots ۹}^{p-1}}{k} \right\rfloor \quad ([] \text{ نماد جز صحیح است})$$

تمرین

۱ یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه کدو، تخمه ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

۲ یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود، هرگاه:

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

۳ در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

۴ گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

۵ یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟

۶ هفت نقطه A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

۷ یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟

پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

ت) ادویه‌ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ یک از ادویه‌های دسته دوم سازگاری ندارند؟

۸ مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با :

$$\text{الف) } \binom{6}{2} \times \binom{5}{3}$$

$$\text{ب) } \binom{6}{2} + \binom{5}{3}$$

تمرین و تست فصل ۶

- ۱- در پرتاب یک سکه و دو تاس باهم چند برآمد وجود دارد؟
- (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴) ۷۲
- ۲- می‌خواهیم کارت‌هایی بسازیم که در سمت راست آنها یکی از حروف {ا، ب، ج، د} و در سمت چپ آنها عدد دو رقمی بدون صفر نوشته شود، چند کارت می‌توان ساخت؟
- (۱) ۳۲۴ (۲) ۳۶۰ (۳) ۲۴۳ (۴) ۱۸۰
- ۳- سه نوع کتاب علمی و ۴ نوع کتاب ادبی را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد به طوری که ابتدا کتابهای علمی یک در میان قرار گیرند؟
- (۱) ۱۴۴ (۲) ۱۲۰ (۳) ۹۶ (۴) ۷۲
- ۴- هشت گلدان با گلهای مختلف را به چند صورت می‌توان در دو کناره هر یک از ۴ پله قرار داد؟
- (۱) ۴۰۳۲۰ (۲) ۸۴۰۰ (۳) ۶۷۲۰ (۴) ۱۲۲۴
- ۵- با ارقام ۵ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چند عدد سه رقمی کوچکتر از ۴۰۰ می‌توان نوشت؟ (تکرار رقم‌ها مجاز نیست.)
- (۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴) ۴۲
- ۶- جواب معادله $C_X^2 = 2X$ کدام است؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- ۷- با حروف کلمه بلوچستان چند کلمه ۲ حرفی بدون توجه به معنا می‌توان ساخت به طوری که حرفی در هر یک از آنها تکرار نشده باشد؟
- (۱) $\frac{8!}{5!3!}$ (۲) $\frac{8!}{5!}$ (۳) $\frac{8!}{3!}$ (۴) $8!$
- ۸- با چهار رقم ۰، ۱، ۲، ۳ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟
- (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۱۵ (۴) ۱۰
- ۹- برای مسافرت از شهری به شهر دیگر ۵ نوع وسیله نقلیه موجود است. تعداد صورت‌هایی که می‌توان از شهر A به شهر B با عبور از دو شهر متوالی C، D رفت به طوری که از هر نوع وسیله نقلیه حداکثر یک بار استفاده شده باشد، کدام است؟
- (۱) ۶۰ (۲) ۸۰ (۳) ۹۰ (۴) ۱۲۵
- ۱۰- با ارقام ۳، ۲، ۱ و ۰ چند عدد سه رقمی که تکرار ارقام مجاز باشد می‌توان نوشت؟
- (۱) ۹ (۲) ۲۴ (۳) ۳۶ (۴) ۴۸
- ۱۱- با چهار عدد ۰، ۹، ۶، ۵ چند عدد چهار رقمی (بدون تکرار) می‌توان ساخت؟
- (۱) ۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۲

۱۲- حاصل عبارت $\frac{(P_n^r)}{(P_{n+1}^{r+1})}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{(n+1)}$ (۲) $\frac{r}{n}$ (۳) $\frac{1}{(n+1)!}$ (۴) $\frac{(r+1)}{(n+1)}$

۱۳- با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۳۰۰ بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

(۱) ۴۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴) ۱۲۰

۱۴- سه کتاب ریاضی و دو کتاب اقتصاد که با هم متفاوتند را به چند طریق می توان در یک قفسه کنار هم قرار داد به طوری که کتابهای هم موضوع همواره کنار هم باشند؟

(۱) ۲۴ (۲) ۱۶ (۳) ۱۲۰ (۴) ۶۰

۱۵- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم تعداد صورتهایی که در آنها عدد زوج آمده است کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۶- یک قفل رمزی دارای یک رمز سه رقمی فرد با ارقام ۱ و ۲ و ... ۹ می باشد اگر رمز این قفل را ندانیم و امتحان کردن هر رمز ۲ دقیقه طول بکشد حداکثر چند ساعت طول می کشد تا قفل باز شود؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۲/۵ (۳) ۱۳ (۴) ۱۳/۵

۱۷- با حروف کلمه جمهوری به چند طریق می توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت بطوریکه حرف اول آنها نقطه دار نباشد؟

(۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۶۰ (۴) ۸۰

۱۸- به چند طریق می توان ۶ مهره متمایز را درون ۱۰ جعبه قرار داد بطوریکه در هر جعبه حداکثر یک مهره موجود باشد؟

(۱) ۶! (۲) ۱۰! (۳) $\frac{10!}{4!}$ (۴) $\frac{10!}{4!6!}$

۱۹- به چند طریق می توان یک کمیته از میان ۵ دانش آموز و ۴ دانشجو انتخاب کرد بطوریکه در هر کمیته ۲ دانش آموز و ۳ دانشجو عضویت داشته باشند؟

(۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴) ۴۰

۲۰- با ۵ خط متمایز در صفحه حداکثر چند مثلث ایجاد می شود؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۲۰ (۴) ۶۰

۲۱- ۵ نقطه بر دایره ای داده شده است. تعداد چند ضلعی محاطی که با این نقاط می توان ساخت کدام است؟

(۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۲۲- مقدار $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ کدام است؟

- (۱) $n(n+1)$ (۲) $n(n-1)$ (۳) $\frac{n+1}{n-1}$ (۴) $\frac{n(n+1)}{2}$

۲۳- با ارقام ۵، ۳، ۲ و ۰ چند عدد چهار رقمی بخش پذیر بر ۵ بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۲۴- شماره گذاری اتومبیل ها در یک شهر با حروف الفبای فارسی و اعداد دو رقمی بدون صفر می باشد. اگر شروع شماره گذاری از الف - ۱۱ و بطور صعودی باشد، شماره هزارمین اتومبیلی که شماره گذاری می شود، کدامست؟

- (۱) ر - ۴۱ (۲) ر - ۳۹ (۳) ز - ۴۱ (۴) ز - ۳۹

۲۵- حاصل P_n^{n-1} کدام است؟

- (۱) n (۲) $n!$ (۳) $(n-1)$ (۴) ۱

۲۶- با ارقام یک تا ۹ چند عدد سه رقمی زوج با تکرار ارقام می توان نوشت؟

- (۱) ۳۲۴ (۲) ۴۰۵ (۳) ۵۰۴ (۴) ۷۲۹

۲۷- با استفاده از ارقام فرد، چند عدد دورقمی کوچکتر از ۵۰ می توان نوشت؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۸ (۴) ۶

۲۸- حاصل $\frac{9!}{7!2!}$ کدام است؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۶۳ (۳) ۳۶ (۴) ۲۷

۲۹- با ارقام (۱، ۰، ۴، ۴، ۴) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰

۳۰- به چند طریق می توان ۵ نفر را دور یک میز نشاند؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۳۰

۳۱- شش سکه یکسان را پرتاب می کنیم. تعداد حالات مختلفی که این سکه ها به زمین می افتد برابر است با:

- (۱) ۷ (۲) 2^6 (۳) ۶ (۴) ۱۲

۳۲- چهار کتاب ریاضی غیر یکسان و سه کتاب فیزیک غیر یکسان را به چند طریق می توان یک در میان در یک قفسه چید؟

- (۱) $2! \times 4! \times 3!$ (۲) $4! \times 3!$ (۳) $7!$ (۴) $\frac{7!}{3! \times 4!}$

۳۳- با ارقام «صفر، ۲، ۴، ۷ و ۹» چند عدد سه رقمی کوچکتر از ۴۰۰ بدون تکرار می‌توان نوشت؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۴۸ (۳) ۲۴ (۴) ۱۲

۳۴- چند عدد شش رقمی با ارقام ۱ و ۰ وجود دارد؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۴۸ (۴) ۶۴

۳۵- حروف کلمه ASSIST را به چند طریق بدون توجه به مفهوم آن می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که S ها یک در میان باشند؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۳۶- در یک امتحان چهار گزینه‌ای با ده سوال متفاوت اگر همه دانش‌آموزان به همه سوال‌ها پاسخ دهند چند پاسخ‌نامه متفاوت می‌توانیم داشته باشیم؟ (تعداد دانش‌آموزان از تعداد حالات بیشتر است)

- (۱) 10^4 (۲) 2^{10} (۳) 4^{10} (۴) 40^{40}

۳۷- حاصل $10 \times 9 \times 8$ با فاکتوریل چه عدد طبیعی برابر است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۳۸- با ارقام ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چند عدد سه رقمی که تکرار رقم‌ها مجاز باشد می‌توان نوشت؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۶ (۳) ۴۲ (۴) ۴۸

۳۹- راه‌های مختلفی که می‌توان رئیس، معاون و دفتردار یک موسسه آموزشی را از بین ۶ نفر کارمند انتخاب نمود، برابر فاکتوریل «چه عددی» است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۹

۴۰- مدیر یک مدرسه می‌خواهد ۴ درس متمایز را در روز شنبه در برنامه درسی یک کلاس تنظیم کند، با چند راه مختلف می‌توان این منظور را عملی ساخت؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۴

۴۱- سه تاس متمایز را با هم پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای برآمدهای ممکن چند عضو دارد؟

- (۱) ۷۲ (۲) ۴۳۲ (۳) ۱۴۴ (۴) ۲۱۶

تهران

۴۲- پلاک اتومبیل سواری سری ب در تهران به صورت $***ب**$ است که هر ستاره نمایش یک رقم غیر صفر است.

در سری ب و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شود؟

- (۱) ۱۱۶۶۴ (۲) ۱۴۵۸۰ (۳) ۱۵۴۸۰ (۴) ۱۸۲۲۵

۴۳- چند عدد سه‌رقمی متشکل از رقم‌های ۹ و ۶ و ۵ و ۰ و بخشپذیر بر ۵ وجود دارد؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۶

۴۴- اگر $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 132$ باشد، حاصل $\binom{n}{n-4}$ کدام است؟

- (۱) ۲۶۴ (۲) ۲۷۵ (۳) ۳۰۸ (۴) ۳۳۰

۴۵- کدام تساوی درست است؟

- (۱) $\frac{9!}{7!} = 72$ (۲) $\frac{5!}{.!} = \infty$ (۳) $\frac{18!}{3!} = 6!$ (۴) $15! + 3! = 18!$

۴۶- کتاب ریاضی و ۳ کتاب اقتصاد که متفاوت‌اند را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد به طوری که کتاب‌های هم‌موضوع همواره کنار هم باشند؟

- (۱) ۲۸۸ (۲) ۱۴۴ (۳) ۱۰۸ (۴) ۷۲

۴۷- در یک مسابقه نقاشی ۱۰۲ نفر شرکت کرده‌اند به چند طریق ممکن است دو نفر اول و دوم مشخص شوند؟

- (۱) ۱۰۳۰۲ (۲) ۱۰۲۰۰ (۳) ۳۴۳۴ (۴) ۵۱۵۱

۴۸- در یک ۱۲ ضلعی محدب از اتصال دو راس دلخواه چند پاره‌خط حاصل می‌شود به طوری که از داخل ۱۲ ضلعی بگذرند؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۵۴ (۴) ۶۰

۴۹- دانش‌آموز کلاس اول و ۵ دانش‌آموز دوم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار بگیرند، هرگاه دانش‌آموزان کلاس اول یک در میان باشند؟

- (۱) $4! \times 5!$ (۲) $2! \times 5! \times 4!$ (۳) $3! \times 5! \times 4!$ (۴) $3! \times 5! \times 4!$

۵۰- اگر $P(n, 2) - C(n, 2) = 36$ باشد، حاصل $C(n, 3)$ چیست؟

- (۱) ۷۲ (۲) ۸۴ (۳) ۹۶ (۴) ۱۰۸

۵۱- با حروف کلمه SHOP و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که حتماً شامل حرف S باشد؟

- (۱) ۶ (۲) ۱۸ (۳) ۱۲ (۴) ۹

۵۲- با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت هر گاه بر ۵ بخش‌پذیر بوده و از نیز ۳۰۰۰۰ بزرگتر باشد؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۵۳- با حروف کلمه مهتابی چند کلمه ۳ حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان نوشت به طوری که حرف اول آن نقطه‌دار باشد؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۲۰ (۳) ۶۰ (۴) ۴۸

۵۴- قرار است ۶ مرد و دو پسر از یک طرف رودخانه به طرف دیگر آن توسط یک قایق بروند ولی قایق فقط گنجایش یک مرد یا دو پسر را دارد. برای انتقال این ۸ نفر به طرف دیگر رودخانه، قایق حداقل چند بار باید عرض رودخانه را طی کند؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۲۷ (۳) ۲۶ (۴) ۲۵

۵۵- حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

- (۱) ۳۶۰ (۲) ۵۴۰ (۳) ۷۲۰ (۴) ۱۴۴۰

۵۶- اگر n یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد، به چند طریق می‌توان با دو رقم ۰ و ۱ گدهای n رقمی مشخص کرد؟

۵۷- یک مجموعه‌ی n عضوی چند زیر مجموعه دارد؟

۵۸- چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از این کلمات به E ختم می‌شود؟

۵۹- چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان نوشت که با T شروع و به E ختم شوند؟

۶۰- با حروف a, b, c, d چند جایگشت می‌توان نوشت که حرف اول جایگشت‌های حاصل همیشه a باشد.

۶۱- هرگاه $S = \{a, b, c\}$ سه ترکیب دو عضوی از اعضای S را بنویسید.

۶۲- چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت که اولاً از ۴۵۰۰ بزرگ‌تر بوده، ثانیاً شامل ارقام ۲ و ۷ نباشد.

۶۳- اگر $A = \{a, b, c, d, e\}$ ، مطلوب است تعیین تعداد زیر مجموعه‌های A که شامل حرف a بوده و شامل حرف b نباشد.

۶۴- به چند طریق می‌توان ۲۰ عدد سیب یکسان را بین ۳ نفر تقسیم کرد، به طوری که به نفر اول و دوم هر کدام حداقل ۵ سیب برسد و به نفر سوم حداکثر ۶ سیب برسد؟

۶۵- با پرتاب سه سکه و یک تاس با هم فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۴۲ (۳) ۴۸ (۴) ۸۴

۶۶- با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و بدون تکرار ارقام چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت که شامل رقم ۴ باشد و یکان آن ۶ نباشد؟

- (۱) ۳۱۲ (۲) ۱۸۰ (۳) ۲۱۲ (۴) ۲۸۰

۶۷- عدد $2^5 \times 3^4 \times 5^2$ چند مقسوم‌علیه طبیعی دارد؟

- (۱) ۹۰ (۲) ۶۰ (۳) ۴۰ (۴) ۲۰



۶۸- شکل مقابل را در نظر بگیرید:

به چند طریق می‌توان از شهر A به D رفت و برگشت به طوری که هر مسیر بین دو شهر متوالی حداکثر یک بار طی شود؟

- (۱) ۳۶۰۰ (۲) ۲۸۰۰ (۳) ۱۸۲۰ (۴) ۱۴۴۰

۶۹- به چند حالت می‌توان از بین ۳ مرد و ۳ زن، یک رئیس، یک معاون، یک کارمند و یک دفتردار انتخاب کرد. به طوری که رئیس حتماً زن باشد؟

- ۶۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۳۶۰ (۳) ۱۲۰ (۴)

۷۰- سه معلم و پنج دانش‌آموز به چند طریق دور یک میز دایره‌ای بنشینند، هرگاه معلم‌ها کنار هم باشند؟

- ۱۲۰ (۱) ۷۲۰ (۲) ۴۳۲۰ (۳) ۵۷۶۰ (۴)



۷۱- در شکل روبه‌رو، چند مثلث می‌توان رسم کرد به طوری که نقاط رئوس مثلث باشند؟

- ۸۴ (۱) ۸۱ (۲) ۷۹ (۳) ۷۶ (۴)

۷۲- عبارت $(a - b)(c - d)(x + y + z)$ ، پس از محاسبه، دارای چند جمله است؟

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴)

۷۳- مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ چند زیرمجموعه ۲ عضوی دارد؟

- ۲۵ (۱) ۲۰ (۲) ۱۵ (۳) ۱۰ (۴)

۷۴- از بین ۶ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۵ دانش‌آموز کلاس سوم می‌خواهیم انجمنی را با ۴ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۲ دانش‌آموز کلاس سوم تشکیل دهیم این عمل به چند طریق ممکن است؟

- ۲۵ (۱) ۱۵۰ (۲) ۳۳۰ (۳) ۴۲۰ (۴)

۷۵- یک مجموعه ۸ عضوی چند زیرمجموعه ۴ عضوی دارد؟

- ۸۴ (۱) ۷۰ (۲) ۵۶ (۳) ۴۲ (۴)

۷۶- سه مهندس و هفت تکنسین مامور اجرای یک پروژه شده‌اند، به چند طریق می‌توان کمیته‌هایی شامل ۱ مهندس و ۳ تکنسین از بین آنان تشکیل داد؟

- ۲۸ (۱) ۳۸ (۲) ۷۵ (۳) ۱۰۵ (۴)

۷۷- تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه $\{a, b, c, d\}$ چند تاست؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۷۸- به چند طریق می‌توان ۵ مهره متمایز را در درون ۸ جعبه قرار داد به طوری که حداکثر در هر جعبه یک مهره قرار گیرد؟

- ۵! (۱) ۸! (۲) $\frac{۵!}{۳!}$ (۳) $\frac{۸!}{۳!}$ (۴)

۷۹- اگر تعداد زیرمجموعه‌های ۷ عضوی یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی آن برابر باشند، تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آن مجموعه کدام است؟

- ۱۱ (۱) ۱۱۰ (۲) ۴۵ (۳) ۵۵ (۴)

۸۰- از بین ۵ مهره قرمز و ۴ مهره سفید می‌خواهیم ۳ مهره را انتخاب کنیم. در چند حالت ۲ مهره از یک رنگ و مهره دیگر به رنگی متفاوت می‌باشد؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۷۰ (۳) ۴۰ (۴) ۵۰

۸۱- در ظرفی دو مهره سفید و ۵ مهره آبی وجود دارد به چند طریق می‌توان دو مهره از بین آنان بیرون آورد؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۸۲- می‌دانیم که تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با $C(n, r)$. ثابت کنید:

$$C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n) = 2^n$$

۸۳- با استفاده از فرمول $C(n, r)$ تساوی زیر را ثابت کنید:

$$C(n+1, r) = C(n, r-1) + C(n, r)$$

۸۴- با استفاده از فرمول $C(n, r)$ تساوی زیر را ثابت کنید.

$$C(n, r) = C(n, n-r)$$

۸۵- یک کیسه محتوی ۴ مهره آبی و ۸ مهره سبز است. تعیین کنید به چند طریق می‌توان ۴ مهره متشکل از ۲ مهره آبی و ۲ مهره سبز را از کیسه انتخاب کرد.

۸۶- چند مثلث می‌توان ساخت که رئوس آن نقاط شکل مقابل باشد؟



$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5} + \binom{8}{6} + \dots + \binom{20}{18}$$

۸۷- حاصل عبارت زیر را بیابید:

۸۸- به چند طریق می‌توانیم از بین ۵ مهره آبی و ۴ مهره سبز، سه مهره انتخاب کنیم به طوری که دو تا آبی و یکی سبز باشد؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۱۰ (۳) ۸۴ (۴) ۱۴

۸۹- در چند زیرمجموعه از $\{1, 2, \dots, 10\}$ حداقل یکی از اعداد ۱ و ۲ و ۳ وجود ندارد؟

- (۱) 3×2^7 (۲) 5×2^7 (۳) 6×2^7 (۴) 7×2^7

۹۰- حاصل $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$ کدام است؟

- (۱) 2^n (۲) $2^n - 1$ (۳) $2^n - 2$ (۴) $2^n + 1$

۹۱- در ظرفی ۳ گوی قرمز و ۴ گوی سفید است دو گوی از ظرف بیرون می آوریم با کدام احتمال هر دو گوی هم‌رنگ‌اند.

$\frac{3}{7}$ (۱) $\frac{4}{7}$ (۲) $\frac{5}{14}$ (۳) $\frac{9}{14}$ (۴)

۹۲- مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی شامل ۲ دارد؟

20 (۱) 18 (۲) 15 (۳) 10 (۴)

۹۳- مجموع $\binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \dots + \binom{10}{9}$ برابر کدام است؟

522 (۱) 526 (۲) 1022 (۳) 1024 (۴)

۹۴- در یک کلاس ۳۰ نفره به چند طریق می‌توان گروه‌های ۲ یا ۳ نفری تشکیل داد؟

$\binom{31}{3}$ (۱) $\binom{30}{2} \binom{30}{3}$ (۲) $P(31, 3)$ (۴) $P(30, 2) + P(30, 3)$ (۳)

۹۵- سکه‌ای را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم تعداد حالت‌هایی که حداقل ۳ بار رو ظاهر شود چه قدر است؟

954 (۱) 968 (۲) 120 (۳) 240 (۴)

۹۶- اگر $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} = 2046$ باشد، حاصل $\binom{n+3}{n+1}$ کدام است؟

91 (۱) 182 (۲) 78 (۳) 156 (۴)

۹۷- اگر $\binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \dots + \binom{12}{12} = a$ و $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \dots + \binom{6}{6} = b$ ، آنگاه حاصل $\frac{a}{b}$ کدام

است؟
 65 (۱) 64 (۲) 63 (۳) 60 (۴)

فصل ۷

آمار و احتمال



پدیده های قطعی: با فرض یکسان بودن شرایط، پدیده های قطعی پدیده هایی هستند که می توان نتیجه آزمایش یا مشاهده را قبل از وقوع به طور قطع مشخص کرد.

پدیده های تصادفی: با فرض یکسان بودن شرایط، پدیده های تصادفی پدیده هایی هستند که نمی توان نتیجه آزمایش یا مشاهده را قبل از وقوع به طور قطع مشخص کرد.

فضای نمونه ای: مجموعه تمام نتایج (برآمدهای) ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه ای آن پدیده تصادفی می نامند و معمولاً آن را با S و تعداد عضوهای آن را با $n(S)$ نمایش می دهند.

فضای نمونه ای گسسته: فضای نمونه ای گسسته به مجموعه های متناهی یا نامتناهی شمارش پذیر گفته می شود.

فضای نمونه ای پیوسته: فضای نمونه ای پیوسته یک مجموعه نامتناهی به صورت بازه هایی از اعداد حقیقی، یا سطوح، یا اشکال و احجام هندسی می باشد.

پیشامد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای یک پیشامد نامیده می شود. مانند پیشامد $A \subseteq S \Rightarrow n(A) \leq n(S)$

احتمال هم شانس در فضای نمونه ای گسسته (احتمال کلاسیک): با فرض یکسان بودن وقوع پیشامدهای مورد بررسی، شانس وقوع پیشامد A در فضای نمونه ای S را احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه ای S می نامند و به صورت زیر تعریف می شود که در آن $n(A)$ تعداد عضوهای پیشامد A و $n(S)$ تعداد عضوهای فضای نمونه ای S است:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

پیشامدهای غیر ممکن (ممتنع، نشدنی): پیشامدهایی را که احتمال وقوع آنها صفر است را غیر ممکن می نامند.

پیشامدی که تهی باشد، پیشامد نشدنی نامیده می شود. $A = \emptyset \Leftrightarrow n(A) = 0 \Leftrightarrow p(A) = 0$

پیشامد حتمی: پیشامدی که تمام عضوهای فضای نمونه ای را شامل شود، حتمی نامیده می شود.

$$A = S \Leftrightarrow n(A) = n(S) \Leftrightarrow p(A) = 1$$

فضای نمونه ای برای پرتاب یک سکه: $S = \{پ، ر\} \Rightarrow n(S) = 2$

فضای نمونه ای برای پرتاب دو سکه با هم یا پرتاب دو بار یک سکه: $S = \Rightarrow n(S) = 2^2 = 4$

$$\{(پ، پ) و (پ، ر) و (ر، پ) و (ر، ر)\}$$

تمرین - یک سکه را دو بار پرتاب می کنیم ، الف-پیشامد A را بنویسید که در آن حداقل یک بار روی سکه آمده باشد. ب- احتمال پیشامد A را بنویسید.

فضای نمونه ای برای پرتاب سه سکه با هم یا پرتاب سه بار یک سکه :

تمرین - سه سکه را با هم پرتاب می کنیم مطلوبست:

الف) احتمال آن که دو بار روی سکه بیاید.

نکته -

ب) احتمال آن که حداکثر دو بار روی سکه بیاید.

نکته -

ج) احتمال آن که حداقل دو بار روی سکه بیاید.

فضای نمونه ای برای پرتاب n سکه با هم یا پرتاب n بار یک سکه :

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$$

فضای نمونه ای برای پرتاب یک تاس :

تمرین - یک تاس را یک بار پرتاب می کنیم مطلوبست احتمال آن که عددی اول بیاید.

فضای نمونه ای برای پرتاب دو تاس با هم یا پرتاب دو بار یک تاس :

تمرین - یک تاس را دو بار پرتاب می کنیم مطلوبست احتمال آن که:

الف) مجموع دو عدد آمده بزرگتر از هفت باشد.

ب) مجموع دو عدد آمده بزرگتر یا مساوی دو باشد.

ج) مجموع دو عدد آمده بزرگتر از دوازده باشد.

فضای نمونه ای برای پرتاب n تاس با هم یا پرتاب n بار یک تاس:

فضای نمونه ای با آزمایشات متعدد و مختلف: اگر یک آزمایش تصادفی شامل k_1 آزمایش تصادفی α_1 بار، k_2 آزمایش تصادفی α_2 بار، k_3 آزمایش تصادفی α_3 بار و ...

k_m آزمایش تصادفی α_m بار باشد، تعداد عضوهای فضای نمونه ای از رابطه زیر به دست می

$$n(S) = k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} k_3^{\alpha_3} \dots k_n^{\alpha_n} \quad \text{آید:}$$

تمرین - یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم مطلوبست:

الف) فضای نمونه ای

ب) احتمال آمدن عددی زوج و پشت سکه

تمرین - سه سکه و دو تاس را با هم پرتاب می کنیم فضای نمونه ای چند عضو دارد؟

نکته - اگر فضای نمونه ای جایگشت n شی بدون تکرار باشد مساله را از روش خانه حالات حل و یا از رابطه زیر استفاده

$$n(S) = n! \quad \text{می کنیم:}$$

تمرین - با اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ اعداد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام می نویسیم. یک عدد به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال

آنرا حساب کنید که این عدد زوج باشد.

نکته - اگر فضای نمونه ای جایگشت n شی با تکرار باشد مساله را از روش خانه حالات حل و یا از رابطه زیر استفاده می

$$n(S) = n^n \quad \text{کنیم:}$$

تمرین - با اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ اعداد ۴ رقمی با تکرار ارقام می نویسیم. یک عدد به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آنرا حساب کنید که این عدد زوج باشد.

نکته - اگر مساله به صورت ترتیب باشد مساله را از روش خانه حالات حل می کنیم و یا از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$p_n^r = p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (r \leq n)$$

تمرین - از میان اعداد ۵ رقمی که رقم اول و آخرشان فرد و بقیه ارقام آنها زوج است یک عدد به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که این رقم یکان این عدد فرد باشد.

تمرین - با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ عددهای سه رقمی بدون تکرار می سازیم. یک عدد به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوبست احتمال آن که این عدد:

الف) فرد باشد.

ب) زوج باشد.

ج) بزرگتر یا مساوی ۳۰۰ باشد.

تمرین - با اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ عددهای سه رقمی با تکرار می‌سازیم. یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال آن که این عدد:

الف) فرد باشد.

ب) زوج باشد.

ج) بزرگتر یا مساوی ۳۰۰ باشد.

نکته - اگر مساله به صورت ترکیب باشد از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (r \leq n)$$

تمرین - از میان ۵ لامپ سالم و ۳ لامپ خراب ۳ لامپ به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که:

الف) هر ۳ لامپ سالم باشند.

ب) فقط ۲ لامپ سالم باشند.

ج) لااقل ۲ لامپ سالم باشند.

(د) حداکثر ۲ لامپ خراب باشند.

(ه) فقط ۲ لامپ سالم یا ۱ لامپ خراب باشند.

نکته - تعداد عددهایی که از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ بر عدد k بخشیدیراند از رابطه زیر به دست می آید:
($k \in S$)

$$A = \left\{ km \mid 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \right\} \Rightarrow n(A) = \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \quad ([] \text{ نماد جز صحیح است})$$

تمرین - از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می کنیم احتمال آن را حساب کنید که این عدد بر ۷ بخشیدیر باشد.

نکته - تعداد عددهای دو رقمی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ که بر عدد k بخشیدیراند از رابطه زیر به دست می آید:
($k \in S$)

$$A = \left\{ km \mid 10 \leq m \leq \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \right\} \Rightarrow n(A) = \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9}{k} \right\rfloor \quad ([] \text{ نماد جز صحیح است})$$

تمرین - از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ یک عدد دو رقمی به تصادف انتخاب می کنیم احتمال آن را حساب کنید که این عدد بر ۷ بخشیدیر باشد.

نکته - تعداد عددهای سه رقمی از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ که بر عدد k بخشیدیراند از رابطه زیر به دست می آید:
($k \in S$)

$$A = \left\{ km \mid 100 \leq m \leq \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \right\} \Rightarrow n(A) = \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{k} \right\rfloor \quad ([] \text{ نماد جز صحیح است})$$

تمرین - از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ یک عدد سه رقمی به تصادف انتخاب می کنیم احتمال آن را حساب کنید که این عدد بر ۷ بخشپذیر باشد.

نکته - تعداد عددهای p رقمی از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ که بر عدد k بخشپذیراند از رابطه زیر به دست می آید: ($k \in S$)

$$A = \left\{ km \mid 10 \leq m \leq \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \right\} \Rightarrow n(A) = \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor - \left[\frac{999 \dots 9}{k} \right] \text{ ([] نماد جز صحیح است)}$$

نکته - احتمال این که روز تولد دو نفر از n در یک روز سال نباشد:

$$\begin{cases} n(A) = 365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1) \\ n(S) = 365 \times 365 \times \dots \times 365 = 365^n \end{cases} \Rightarrow p(A) = \frac{365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)}{365^n}$$

تبصره - اگر $n > 365$ ، حتما دو نفر در یک روز سال متولد شده اند پس در این حالت: $p(A) = 0$

نکته - احتمال این که روز تولد دو نفر از n در یک روز ماه نباشد:

$$\begin{cases} n(A) = 30 \times 29 \times \dots \times (30 - n + 1) \\ n(S) = 30 \times 30 \times \dots \times 30 = 30^n \end{cases} \Rightarrow p(A) = \frac{30 \times 29 \times \dots \times (30 - n + 1)}{30^n}$$

تبصره - اگر $n > 30$ ، حتما دو نفر در یک روز ماه متولد شده اند پس در این حالت: $p(A) = 0$

نکته - احتمال این که روز تولد دو نفر از n در یک روز هفته نباشد:

$$\begin{cases} n(A) = 7 \times 6 \times \dots \times (7 - n + 1) \\ n(S) = 7 \times 7 \times \dots \times 7 = 7^n \end{cases} \Rightarrow p(A) = \frac{7 \times 6 \times \dots \times (7 - n + 1)}{7^n}$$

تبصره - اگر $n > 7$ بنا بر اصل لانه کبوتری حتما دو نفر در یک روز هفته متولد شده اند پس در این حالت: $p(A) = 0$

تمرین - احتمال این که روز تولد دو نفر از ۴ نفر در یک روز از شنبه تا چهارشنبه نباشد را حساب کنید.

احتمال دو جمله ای: اگر یک سالم یک بار پرتاب شود احتمال هر کدام از برآمدها $\frac{1}{4}$ است.

$$p(\text{آمدن } k \text{ رو}) = \frac{\binom{n}{k}}{4^n} \quad \text{بنابراین:}$$

$$p(k \text{ پیروزی}) = \frac{\binom{n}{k}}{4^n} \quad \text{به طور کلی:}$$

تمرین - یک سکه را ۱۰ بار پرتاب می کنیم، احتمال آن را حساب کنید که ۶ بار روی سکه بیاید.

تمرین - یک تاس را ۱۰ بار پرتاب می کنیم، احتمال آن را حساب کنید که ۶ بار عددی زوج بیاید.

قوانین احتمال:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (1)$$

$$p(S) = 1 \quad (2)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad , \quad A \cap B = \emptyset \quad (3)$$

نکته - سه اصل فوق را اصول کولموگروف می نامند.

اجتماع دو پیشامد $(A \cup B)$: اجتماع دو پیشامد A و B زمانی رخ می دهد که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق نیافتند.

اشتراک دو پیشامد $(A \cap B)$: اشتراک دو پیشامد A و B زمانی رخ می دهد که هر دو پیشامد A و B با هم اتفاق بیافتند.

دو پیشامد ناسازگار: اگر اشتراک دو پیشامد، پیشامد نشدنی باشد، آن دو پیشامد را ناسازگار می نامند. به عبارت دیگر رخ داد دو پیشامد ناسازگار، هم زمان غیر ممکن است.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

متمم پیشامد A (مکمل پیشامد A): متمم پیشامد A که به صورت A' یا \bar{A} یا A^c نمایش داده می شود،

زمانی رخ می دهد که پیشامد A اتفاق نیافتد.

$$P(A') = 1 - P(A)$$

اثبات:

تفاضل دو پیشامد $(A - B)$: تفاضل دو پیشامد A و B زمانی رخ می دهد که پیشامد A اتفاق بیافتد و B اتفاق نیافتد.

تفاضل متقارن دو پیشامد $(A \Delta B)$: تفاضل متقارن دو پیشامد A و B زمانی رخ می دهد که تنها یکی از دو پیشامد A یا B

اتفاق بیافتند. به عبارت دیگر A یا B رخ دهد ولی هر دو با هم اتفاق نیافتند.

قضیه ۱- اگر A ، B و C سه پیشامد دو به دو مجزا (جدا از هم) باشند، یعنی اشتراک هر جفت از آنها تهی باشد، آنگاه:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

قضیه ۲- اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ ، آنگاه:

$$P(A) \leq P(B) \quad (\text{الف})$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \quad (\text{ب})$$

قضیه ۳- اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه ای S باشند، آنگاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

قضیه ۴- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، آنگاه:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

قضیه ۵- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، آنگاه:

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \quad (\text{الف})$$

$$P(A) \geq P(A \cap B) \quad (\text{ب})$$

$$P(A) \leq P(A \cup B) \quad (\text{پ})$$

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1 \quad (\text{ت})$$

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \quad (\text{ث})$$

قضیه ۶- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A) = 1$ ، آنگاه:

$$P(A \cap B) = P(B)$$

قضیه ۷- برای پیشامدهای A_1, A_2, \dots, A_n از فضای نمونه ای S داریم: $P(A_k) = 1$ به طوری که $k = 1, 2, \dots, n$ ،
 آنگاه: $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = 1$

قضیه ۸- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A) = P(B) = 1$ ، آنگاه: $P(A \cap B) = 1$

تمرین

- ۱ هر یک از اعداد طبیعی و زوج کوچکتر از ۱۱ را روی یک کارت می نویسیم و یکی از این کارت‌ها را به تصادف برمی داریم:
 - الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش یا پدیده تصادفی را مشخص کنید.
 - ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه‌ای می توان تعریف کرد؟
 - پ) پیشامد A را که در آن «عدد روی کارت انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد»، مشخص کنید.
- ۲ فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. هر یک از عبارتهای توصیفی زیر را با نمودار ون نمایش دهید و هاشور بزنید.
 - الف) پیشامدهای A و C رخ بدهند؛ ولی B رخ ندهد.
 - ب) فقط پیشامد B رخ بدهد.
 - پ) پیشامد B رخ بدهد و C رخ ندهد.
- ۳ هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می نویسیم و آنها را در یک کیسه قرار می دهیم؛ سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید:
 - الف) فضای نمونه‌ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت زوج باشد».
 - ب) پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اول باشد».
 - پ) پیشامد C که در آن «عدد رو شده بزرگتر از ۲ باشد».

۴ خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آنکه حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید.

۵ سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می‌اندازیم و اگر رو بیاید دو سکه دیگر را می‌اندازیم:
الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
ب) پیشامد آنکه «تاس زوج بیاید» را مشخص کنید.
پ) پیشامد آنکه «حداقل ۲ سکه رو بیاید» را مشخص کنید.

۶ می‌خواهیم از بین ۳ دانش‌آموز کلاس دهم رشته ریاضی و ۲ دانش‌آموز دهم رشته تجربی یک تیم دو نفره تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد:
الف) هر دو نفر، از دانش‌آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟
ب) هر دو نفر، هم رشته باشند؟
پ) ۱ نفر از رشته ریاضی و ۱ نفر از رشته تجربی باشد؟

۷ یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می‌پذیرد. اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع A ($P(A) = \frac{34}{100}$) و ۶۲ درصد کارت نوع B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

۸ اگر ۷ نفر که دو نفر آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد:
 الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟
 ب) یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

۹ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \subseteq B$ ، ثابت کنید، $P(A) \leq P(B)$.

تمرین



۱ می‌خواهیم درباره کیفیت محصولات تولیدی یک کارخانه، تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور، از تعداد کل قطعات تولید شده در کارخانه که برابر با ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می‌شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید:

ویژگی مورد بررسی	اندازه نمونه	اندازه جامعه	جامعه

۲ کدام جمله درست و کدام جمله نادرست است:

الف) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است.....

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند.....

پ) نمونه زیر مجموعه‌ای از جامعه است.....

۳ در شکل زیر، دانش‌آموزان یک مدرسه در صف صبحگاهی مشاهده می‌شوند.

هر صف افقی نشان‌دهنده تعداد دانش‌آموزان یک کلاس است. جامعه و اعضای آن را مشخص کنید و دو نمونه دلخواه از این جامعه را ارائه کنید.



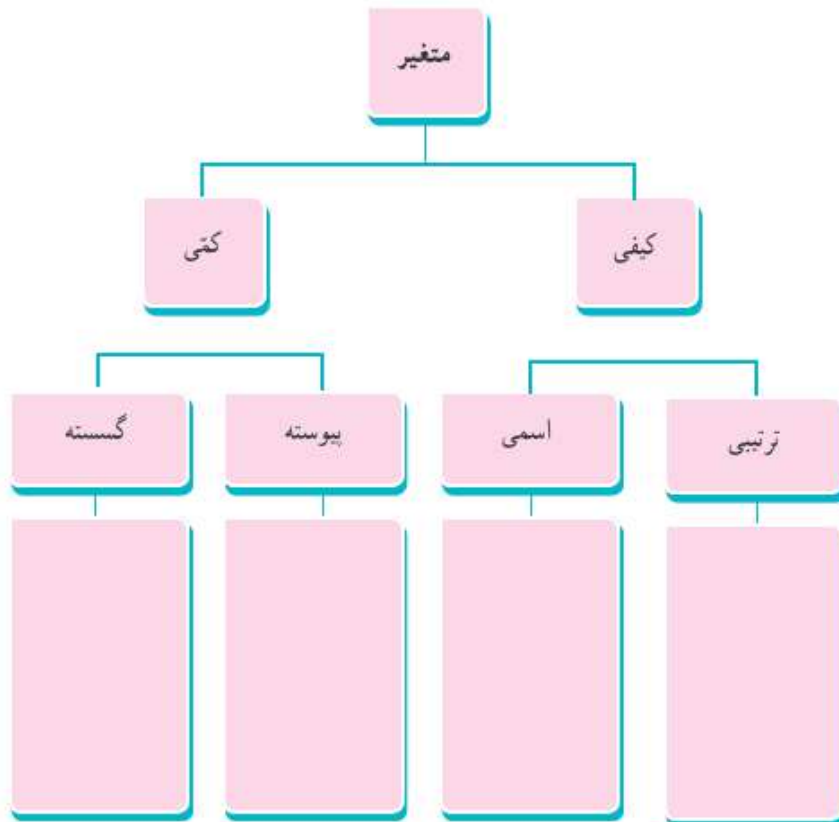
۱ با پر کردن جاهای خالی، اسمی یا ترتیبی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید.

- الف) مراحل رشد یک انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان سال، کهن سال)
 ب) نژاد افراد (سفید پوست، زرد پوست، سیاه پوست)
 پ) رنگ موی افراد (مشکی، قهوه‌ای، طلایی)
 ت) کیفیت میوه هلو (درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳)
- ۲ نوع متغیرها را در نمودار زیر، دسته‌بندی کنید.

- اسمی ترتیبی
 اسمی ترتیبی
 اسمی ترتیبی
 اسمی ترتیبی



متغیر	نوع متغیر
۱- میزان بارندگی برحسب سانتی متر در یک شهر	
۲- نوع بارندگی (باران، برف)	
۳- تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند	
۴- میزان دمای هوا	
۵- شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)	
۶- انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)	
۷- شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)	



۳ جدول زیر متغیرهای دانش‌آموزان را نشان می‌دهد. انواع متغیرها از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، ترتیبی و اسمی را در جدول زیر کامل کنید.

متغیرهای دانش‌آموزان	متغیر کمی	متغیر کیفی	متغیر گسسته	متغیر پیوسته	متغیر ترتیبی	متغیر اسمی
سن	×			×		
نمرهٔ ریاضی نهم						
جنسیت (دختر و پسر)						
قد						
وزن						
میزان هوش (هوش بالا، متوسط، پایین)		×			×	
میزان رضایت در مدرسه (بسیار، متوسط، ضعیف)						
شاخص تودهٔ بدن						

۴ فرض کنید وزن شخصی ۹۵ کیلوگرم و قد او ۱۶۰ سانتی‌متر باشد. الف) شاخص تودهٔ بدن این شخص را حساب کنید.

ب) شاخص تودهٔ بدن شخص چه نوع متغیری از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، اسمی و ترتیبی است؟

۵ جدول سمت راست، جدول عددی شکل سمت چپ است. اگر رنگ سبز را با عدد ۳، رنگ سفید را با عدد ۲ و رنگ قرمز را با عدد ۱ نشان دهیم، جدول عددی و شکل زیر را کامل کنید. این شکل چه چیزی است؟

؟	؟	؟
؟		؟
	؟	؟

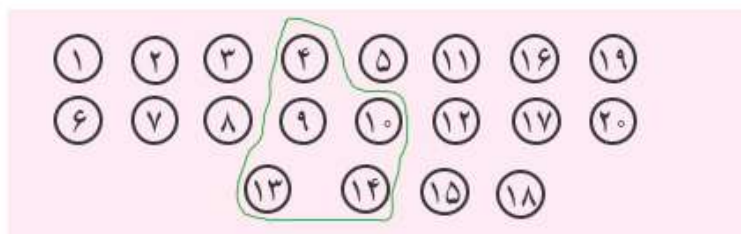
شکل

؟	۳	۳
۲	؟	۲
؟	۱	۱

جدول عددی

۶ جامعه و نمونه را تعریف کنید و برای هر یک مثال بزنید.

۷ شکل زیر یک جامعهٔ فرضی را نشان می‌دهد که اعضای آن را با شماره‌های ۱ تا ۲۰ مشخص کرده‌ایم. همچنین اعضای نمونه با خط سبز رنگ انتخاب شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید:



الف) اندازهٔ جامعه چه عددی است؟

ب) اندازهٔ نمونهٔ انتخابی چه عددی است؟

پ) اعضای نمونهٔ انتخابی را بنویسید.

۸ جدول زیر را کامل کنید.

نوع متغیر	متغیر
	وزن یک هلو
	کیفیت یک هلو
	اندازه طول بدن بوزبلنگ ایرانی
	اقوام ایرانی
	وضعیت آب و هوا
	دمای هوا در قله
	فشار هوا در قله کوه

تمرین و تست فصل ۷

- ۱- در پرتاب ۴ سکه و یک تاس با هم، فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟
- (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۷۲ (۴) ۹۶
- ۲- در پرتاب ۵ سکه با هم فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟
- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۲۴ (۴) ۳۲
- ۳- تعداد پیشامدهای سه عضوی فضای نمونه‌ی یک آزمایش تصادفی دو برابر تعداد پیشامدهای دو عضوی همان فضای نمونه است. این فضای نمونه چند عضو دارد؟
- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۴- فضای نمونه‌ی آزمایش تصادفی اول دارای ۵ عضو و فضای نمونه‌ی آزمایش تصادفی دوم دارای ۳ عضو است. اگر این دو آزمایش تصادفی همزمان رخ دهند، تعداد پیشامدهای دو عضوی فضای نمونه‌ی جدید کدام است؟
- (۱) ۱۰۵ (۲) ۲۸ (۳) ۵۶ (۴) ۲^۸
- ۵- یک ظرف شامل ۷ مهره و ظرف دیگر شامل ۸ مهره است. از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم، فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟
- (۱) ۱۵ (۲) ۵۶ (۳) ۲۱۰ (۴) ۲۲۵
- ۶- یک سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو بار نتیجه یکسان حاصل شد، یک سکه دیگر پرتاب می‌کنیم و در غیر اینصورت یک تاس پرتاب می‌کنیم، فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟
- (۱) ۸ (۲) ۱ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰
- ۷- کدام یک درست است؟
- (۱) هر عضو فضای نمونه‌ای را یک پیشامد می‌نامیم.
 - (۲) هر زیر مجموعه‌ی ناتهی فضای نمونه‌ای را پیشامد می‌نامیم.
 - (۳) پیشامد نتیجه حاصل از انجام یک آزمایش تصادفی است.
 - (۴) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پیوسته ناتهی، نامتناهی است.
- ۸- در پرتاب n سکه و یک تاس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای ۱۲ برابر تعداد اعضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب ۴ سکه می‌باشد. n کدام است؟
- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۹- یک سکه را پرتاب می‌کنیم، اگر پشت آمد سکه را دو بار دیگر و اگر رو آمد سکه را یکبار دیگر پرتاب می‌کنیم مطلوب است فضای نمونه آزمایش:
- ۱۰- در عبارت زیر فضای نمونه پیوسته و گسسته را مشخص نمایید.
فضای نمونه طول عمر یک لامپ
- ۱۱- در پرتاب ۴ سکه و یک تاس با هم فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟
- (۱) ۳۶ (۲) ۴۸ (۳) ۷۲ (۴) ۹۶

۱۲- در عبارت زیر فضای نمونه پیوسته و گسسته را مشخص نمایید.
فضای نمونه پرتاب یک سکه و یک تاس

۱۳- درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

فضای نمونه پیوسته یک مجموعه‌ی متناهی به صورت بازه‌هایی از اعداد حقیقی و یا اشکال و احجام هندسی می‌باشند.

۱۴- کدام بیان برای پدیده غیرممکن نادرست است؟

(۱) مکمل پدیده قطعی (۲) خارج فضای نمونه‌ای (۳) با احتمال وقوع صفر (۴) با احتمال وقوع کمتر از $\frac{1}{3}$

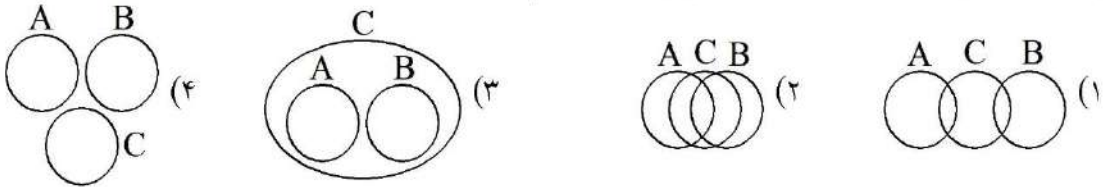
۱۵- اگر $S = \{a, b, 1, 2\}$ یک فضای نمونه‌ای باشد کدام مجموعه زیر یک پیشامد از این فضا می‌باشد؟
(۱) $\{1, 2, c\}$ (۲) $\{1, a, 3\}$ (۳) $\{a, b, c\}$ (۴) $\{a, 1, 2\}$

۱۶- در آزمایش پرتاب دو سکه با هم، کدام مشاهده، پیشامد ساده است؟
(۱) دو رو (۲) حداقل یک رو (۳) یک رو (۴) حداکثر یک رو

۱۷- دو تاس با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال کدام پیشامد بیشترین است؟

(۱) جمع دو عدد ظاهر شده ۶ باشد. (۲) جمع دو عدد ظاهر شده ۱۰ باشد.
(۳) جمع دو عدد ظاهر شده ۷ باشد. (۴) جمع دو عدد ظاهر شده ۴ باشد.

۱۸- از بین مردمان یک شهر، شخصی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر A پیشامد مرد بودن و B پیشامد زن بودن و C پیشامد عینکی بودن باشد، نمودار ون این پیشامدها کدام است؟



۱۹- در پرتاب یک سکه به تعداد ۱۱ بار، در یازدهمین پرتاب چهارمین پشت ظاهر شد. تعداد اعضاء این پیشامد کدام است؟

(۱) ۳۳۰ (۲) ۱۶۵ (۳) ۲۱۰ (۴) ۱۲۰

۲۰- سکه‌ای را آنقدر می‌اندازیم تا برای سومین بار «رو» بیاید. تعداد حالتی که می‌توان در ۱۰ بار پرتاب یک سکه به این منظور رسید کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۸ (۳) ۳۶ (۴) ۱۲۰

۲۱- ۵ نفر در طبقه همکف یک ساختمان ۷ طبقه وارد آسانسوری می‌شوند پیشامد آنکه در هر طبقه حداکثر یک نفر پیاده شود چند عضو دارد؟

(۱) ۲۵۲۰ (۲) ۵۰۴۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۲۱

۲۲- از ۱۰۴ بار گزارش در یک ایستگاه هواشناسی، ۲۶ بار پیش‌بینی وضع هوا نادرست بوده است، تخمین احتمال درستی پیش‌بینی وضع هوا، در این ایستگاه کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{7}{8}$

۲۳- فرض کنیم $p(A) = \frac{1}{2}$ ، $n(A) = 8$ ، $n(B) = 5$ ، $p(B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{13}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) $\frac{8}{10}$ (۴) $\frac{5}{13}$

۲۴- عددی به تصادف از فضای نمونه $\{1, 2, \dots, 9\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه عدد انتخاب شده زوج یا مضرب ۳ باشد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{5}{9}$

۲۵- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ی S باشند، حاصل $p(A \cap B) - p(A') - 1$ برابر کدام است؟

- (۱) $p(B)$ (۲) $p(B')$ (۳) $p(A \cap B')$ (۴) $p(A' \cap B)$

۲۶- احتمال مکمل وقوع پیشامدی $\frac{1}{3}$ و فضای نمونه‌ی آن دارای ۶۰ عضو بوده. تعداد نتایج مشاهده شده از وقوع پیشامد چقدر است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۳۰ (۳) ۲۰ (۴) ۱۰

۲۷- اگر $P(A) + P(A' \cap B) = P(A \cap B)$ باشد، $P(A - B)$ کدام است؟

- (۱) $P(A)$ (۲) صفر (۳) $P(A \cap B)$ (۴) $P(B' - A)$

۲۸- در پرتاب دو تاس احتمال اینکه مجموع دو تاس از ۷ کمتر باشد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{5}{12}$

۲۹- اگر پیشامد A زیرمجموعه‌ی پیشامد B باشد، $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ آنگاه $P(B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{7}{12}$

۳۰- ۴ لامپ از ده لامپ موجود سوخته است. اگر سه لامپ به تصادف از بین آنها اختیار کنیم. احتمال اینکه هر سه لامپ سالم باشند کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{7}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۳۱- احتمال آنکه دانش آموزی در درس فیزیک قبول شود $\frac{55}{100}$ و در درس شیمی قبول شود $\frac{6}{100}$ است، اگر احتمال آنکه حداقل در یکی از دو درس قبول شود $\frac{75}{100}$ باشد، با کدام احتمال در هر دو درس قبول می‌شود؟

- (۱) $\frac{35}{100}$ (۲) $\frac{40}{100}$ (۳) $\frac{45}{100}$ (۴) $\frac{50}{100}$

۳۲- فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. حاصل $P(A \cup B) - P(A - B) - P(A \cap B)$ کدام است؟

- (۱) $P(A')$ (۲) $P(A)$ (۳) $P(B')$ (۴) $P(B)$

۳۳- یک سکه و یک تاس سالم را با هم می‌اندازیم. پیشامد آنکه تاس عدد زوج و سکه رو بیاید، چند عضو دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۷

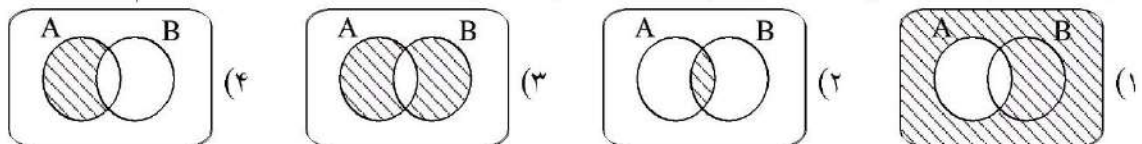
۳۴- در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره قرمز وجود دارد. ۳ مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. پیشامد آنکه هر سه مهره هم‌رنگ باشند، چند عضو دارد؟

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶

۳۵- ۴ نفر دانش‌آموز از کلاس دوم و ۷ نفر از کلاس سوم داوطلب بازی در تیم فوتبال مدرسه شده‌اند. در صورتی که بازی در تیم برای ۶ نفر از آنها امکان دارد. پیشامد انتخاب ۶ نفر در حالتی که حداقل ۵ نفر از کلاس سوم باشد، چند عضوی است؟

- (۱) ۸۴ (۲) ۸۵ (۳) ۹۱ (۴) ۹۲

۳۶- اگر A و B دو پیشامد معین باشند، نمودار پیشامد «تنبه‌یگی از دو پیشامد A یا B اتفاق بیفتد.» کدام است؟



۳۷- سه سرباز، چهار افسر موجودند، پیشامد اینکه هیچ دو سربازی کنار هم نباشد، چند عضو دارد؟

- (۱) $۳! \times ۴!$ (۲) $۴! \times ۶۰$ (۳) $۲! \times ۴!$ (۴) $۷!$

۳۸- کدام یک نادرست است؟

- (۱) مجموعه‌ی کلیه نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ی آن آزمایش می‌گویند
 (۲) هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ی یک پیشامد نام دارد
 (۳) هر دو پیشامد از فضای نمونه‌ی یک آزمایش تصادفی هیچ اشتراکی با هم ندارند
 (۴) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ی S باشند، پیشامد آن‌که فقط A یا فقط B روی دهد عبارتست از $A \Delta B$

۳۹- سه سکه را پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه حداقل یکی از سه سکه به پشت بیفتد کدام است؟

- (۱) $\frac{۷}{۸}$ (۲) $\frac{۵}{۶}$ (۳) $\frac{۳}{۴}$ (۴) $\frac{۵}{۸}$

۴۰- از کیسه‌ای شامل ۳ مهره قرمز و ۴ مهره سبز، دو مهره به تصادف با هم برمی‌داریم احتمال آنکه هر دو مهره سبز باشد کدام است؟

- (۱) $\frac{۱}{۷}$ (۲) $\frac{۲}{۷}$ (۳) $\frac{۳}{۷}$ (۴) $\frac{۴}{۷}$

۴۱- از ۴ نهال سیب قرمز و ۲ نهال سیب زرد، به طور تصادفی سه نهال کاشته شده است. احتمال اینکه دو نهال سیب قرمز و یک نهال سیب زرد کاشته شده باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۴۲- فرض کنید $S = \{1, x, y, z\}$ و $A = \{1, x\}$ و $B = \{1, y\}$. پیشامد $\{1, x, y\}$ بیان کننده کدام پیشامد ذیل است؟

- (۱) $B \cap A$ (۲) B (۳) $B \cup A$ (۴) A

۴۳- مکعبی که روی شش وجه آن اعداد ۱ تا ۶ نوشته به هوا پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد زوج یا عدد بزرگتر از ۳ رخ دهد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۴۴- دو تاس (مکعب) متمایز را پرتاب می‌کنیم، با کدام احتمال هر یک از اعداد رو شده مضرب ۳ نیست؟

- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{5}{12}$ (۴) $\frac{7}{18}$

۴۵- از مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ دو عضو به تصادف انتخاب شده است، با کدام احتمال هر دو عضو زوجند؟

- (۱) $\frac{4}{7}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴) $\frac{1}{7}$

۴۶- در پرتاب دو تاس با هم با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده ۱۰ می‌باشد؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{1}{18}$

۴۷- در کیسه‌ای ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه وجود دارد. از این کیسه دو مهره پشت سر هم و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال آنکه اولی سفید و دومی سیاه باشد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{15}$ (۲) $\frac{2}{15}$ (۳) $\frac{6}{25}$ (۴) $\frac{4}{15}$

۴۸- در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۸ مهره قرمز موجود است. دو مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آنکه دو مهره هم‌رنگ نباشند چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{10}{39}$ (۳) $\frac{5}{13}$ (۴) $\frac{20}{39}$

۴۹- ۳ لامپ را از میان ۱۵ لامپ که ۵ عدد آنها بدون هیچگونه آثار خارجی معیوب می‌باشند، انتخاب می‌کنیم. تعیین کنید احتمال این‌که:

- (الف) هیچ کدام معیوب نباشند. (ب) فقط یکی از لامپ‌ها معیوب باشد.

۵۰- در کیسه‌ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه وجود دارد. ۳ مهره به‌طور تصادفی از کیسه بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آن‌که:

الف) ۱ مهره سفید و ۲ مهره سیاه باشد.
ب) هر سه مهره هم‌رنگ باشند.

۵۱- از کیسه‌ای که در آن ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است دو مهره با هم و به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه:

الف: دو مهره هم‌رنگ باشند.
ب: دو مهره هم‌رنگ نباشند.

۵۲- در جعبه‌ای ۲ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز داریم. از این جعبه ۳ مهره با هم خارج می‌کنیم. به کدام احتمال فقط ۲ مهره هم‌رنگ می‌باشند؟

$$\frac{9}{10} \text{ (۱)} \quad \frac{3}{10} \text{ (۲)} \quad \frac{3}{5} \text{ (۳)} \quad \frac{2}{5} \text{ (۴)}$$

۵۳- اگر $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ آنگاه دو پیشامد A و B چگونه‌اند؟

۱) ناسازگار (۲) وابسته (۳) مستقل (۴) متمم هم‌اند

۵۴- (مثال) از جعبه‌ای محتوی ۷ توپ قرمز، ۴ توپ آبی و ۱ توپ سبز، ۳ توپ خارج می‌کنیم. به چه احتمالی: الف) هر سه توپ قرمز است. ب) هر سه توپ هم‌رنگ است. ج) حداقل ۲ توپ قرمز است. د) حداقل ۲ توپ هم‌رنگ داریم.

$$\begin{array}{l} 7 : R \\ 4 : B \\ 1 : Y \\ \hline \text{کل} : 12 \end{array} \quad n(S) = \binom{12}{3} \quad \text{الف) } P(A) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}}$$

$$\text{ب) } P(B) = \frac{\binom{7}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{12}{3}}$$

$$\text{ج) } P(C) = \frac{\binom{7}{2} + \binom{5}{1}}{\binom{12}{2}} + P(A)$$

یا دو توپ یا سه توپ قرمز

$$\text{د) حداقل ۲ رنگ یکسان : } P(D) = \frac{\binom{7}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{1}{1}}{\binom{12}{3}} \Rightarrow P(D') = 1 - P(D)$$

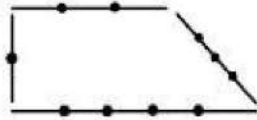
۵۵- در جعبه‌ای ۲ مهره سفید، ۳ مهره سیاه، ۴ مهره قرمز قرار دارد. ۲ مهره به تصادف از جعبه خارج می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد این دو مهره هم رنگ نباشند؟

$$\frac{1}{4} \text{ (۱)} \quad \frac{3}{4} \text{ (۲)} \quad \frac{13}{18} \text{ (۳)} \quad \frac{25}{36} \text{ (۴)}$$

۵۶- از جعبه ای که شامل ۵ مهره ی سبز و ۴ مهره ی زرد است، ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم. احتمال آن که حداقل ۱ مهره آبی باشد، کدام است؟

$\frac{2}{33}$ (۱) $\frac{26}{33}$ (۲) $\frac{1}{33}$ (۳) $\frac{31}{33}$ (۴)

۵۷- از میان ۱۰ نقطه ی زیر، ۴ نقطه به تصادف انتخاب کردیم. احتمال آن که با چهار نقطه ی انتخاب شده بتوان یک چهارضلعی ساخت به قسمی که روی هر خط فقط یک رأس چهارضلعی قرار داشته باشد، کدام است؟



$\frac{4}{35}$ (۱) $\frac{12}{35}$ (۲) $\frac{9}{35}$ (۴) $\frac{7}{35}$ (۳)

۵۸- جعبه ای شامل ۵ مهره ی آبی و ۴ مهره ی سبز است. از این جعبه سه مهره خارج می کنیم. با چه احتمالی حداکثر دو مهره ی آبی خارج شده است؟

$\frac{73}{84}$ (۱) $\frac{70}{84}$ (۲) $\frac{71}{84}$ (۳) $\frac{74}{84}$ (۴)

۵۹- کیسه ای شامل ۵ مهره ی سفید و ۶ مهره ی سیاه است. از این کیسه ۳ مهره با هم به تصادف بیرون می آوریم، مطلوبست احتمال آن که حداقل ۲ مهره سفید خارج شده باشد.

۶۰- کیسه ای شامل ۴ مهره ی سفید و ۵ مهره ی سیاه است. ۳ مهره به تصادف از این کیسه خارج می کنیم. احتمال این که حداقل دوتای آن ها هم رنگ باشند، کدام است؟

$\frac{4}{9}$ (۱) $\frac{5}{9}$ (۲) $\frac{8}{9}$ (۳) ۱ (۴)

۶۱- کارمندان اداره ای مطابق جدول زیر توزیع شده اند. احتمال آن که کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی نداشته باشد، چه قدر است؟

		جنسیت	
		زن	مرد
تحصیلات	دانشگاهی	۲۰	۲۵
	کم تر از دانشگاهی	۷۰	۸۵

$\frac{25}{110}$ (۱) $\frac{15}{22}$ (۲) $\frac{17}{22}$ (۴) $\frac{19}{22}$ (۳)

۶۲- از بین ۶ سیب سالم و ۴ سیب فاسد، ۳ تا سیب به تصادف انتخاب می کنیم. با کدام احتمال حداقل یکی از سیب های انتخاب شده، فاسد است؟

$\frac{1}{5}$ (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴)

۶۳- در ظرفی ۴ مهره سفید و ۳ مهره قرمز است. ۲ مهره به تصادف با هم بیرون می آوریم. احتمال آن که حداکثر یکی از آن ها سفید باشد را محاسبه کنید.

- ۶۴- در یک جامعه درصد گروه خونی نوع A، B، AB و O به ترتیب ۴۰، ۲۰، ۱۰ و ۳۰ می‌باشد، اگر دو فرد از این جامعه انتخاب شوند با کدام احتمال فقط گروه خونی یکی، از نوع A است؟
- (۱) $0/24$ (۲) $0/36$ (۳) $0/48$ (۴) $0/64$

- ۶۵- جدول زیر چگونگی توزیع کارمندان اداره‌ای را نشان می‌دهد. احتمال آنکه کارمندی از این اداره مرد یا لیسانس باشد

	لیسانس	دیپلم
زن	۵	۵
مرد	۲۰	۱۰

کدام است؟

(۱) $0/4$

(۲) $0/5$

(۳) $0/6$

(۴) $0/7$

- ۶۶- از کیسه‌ای که محتوی آن ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز است، به تصادف ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، بین مهره‌های خارج شده، مهره سفید نیست یا مهره سیاه نیست؟

(۴) $\frac{19}{44}$

(۳) $\frac{9}{22}$

(۲) $\frac{17}{44}$

(۱) $\frac{7}{22}$