

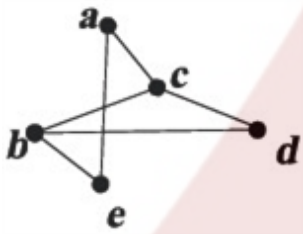
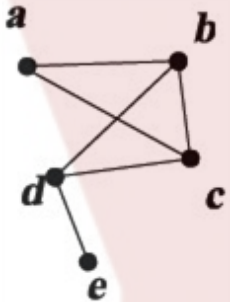


جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
دبیرستان غیردولتی موحّد

امتحانات
دبیرستان غیر دولتی موحّد

نام و نام خانوادگی:	امتحانات ترم اول	نام دبیر: آقای پناهی قر
پایه: دوازدهم ریاضی	گسسته	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰
کلاس:		زمان پاسخگویی: ۱۲۰ دقیقه

بارم	لطفاً پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید	ردیف
۲	<p>درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر $a b$ و m, n دو عدد طبیعی باشند که $m \leq n$، آن‌گاه $a^m b^n$.</p> <p>ب) اگر $a b$ آن‌گاه $(a, b) = a$.</p> <p>پ) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی‌اند.</p> <p>ت) منظور از حل معادله هم‌نهشتی، پیدا کردن همه جواب‌های حقیقی است که در معادله $ax \equiv b \pmod{m}$ صدق کند.</p>	۱
۲	<p>عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید.</p> <p>الف) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گنگ / گویا) است.</p> <p>ب) اگر دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a b$، برای هر $m \in \mathbb{Z}$ داریم: $(a mb \text{ / } ma b)$.</p> <p>پ) اگر $a b$ آن‌گاه b برابر با $(a \text{ / } a)$ است.</p> <p>ت) اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ و $(c, m) = d$ آن‌گاه رابطه $\left(a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}} \text{ / } a \equiv b \pmod{m} \right)$ برقرار خواهد بود.</p>	۲
۱	<p>درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.</p> <p>ب) هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ برقرار باشد.</p>	۳
۱	<p>جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.</p> <p>الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a b$ آن‌گاه عدد شمارنده عدد است.</p> <p>ب) m عددی صحیح است. حاصل $(2^m, 6^m)$ برابر با است.</p>	۴
۲	<p>جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) مرتبه گراف نشان‌دهنده تعداد گراف می‌باشد.</p> <p>ب) اگر یک یال، یک رأس را به خود آن رأس وصل کند، این یال را می‌نامیم.</p> <p>پ) دو یال را می‌نامیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها را به هم متصل کند.</p> <p>ت) تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی است.</p>	۵
۲	<p>فرض کنید $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ اگر $a \equiv b \pmod{m}$ ثابت کنید: $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.</p>	۶
۲	<p>اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.</p>	۷

۱	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.	۸
۱.۵	معادله هم‌نهشتی $2x \equiv 11 \pmod{5}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.	۹
۱.۵	باقی‌مانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.	۱۰
۱	<p>گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) دوری به طول ۵ مشخص کنید.</p> <p>ب) مکمل گراف G را رسم کنید.</p>	۱۱
		
۱	<p>گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) $\delta(G)$ را مشخص کنید.</p> <p>ب) اندازه گراف را تعیین کنید.</p> <p>پ) مجموعه همسایگی بسته رأس b را بنویسید.</p> <p>ت) اگر $N_G(d) = \{e, x, b\}$ باشد، x کدام رأس است؟</p>	۱۲
		
۱	جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $9x + 13y = 7$ را به دست آورید.	۱۳
۱	<p>علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکه‌ی اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آن‌ها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد.</p> <p>الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟</p> <p>ب) اگر بودن در فهرست دوستان به این صورت باشد که هر دو نفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟</p>	۱۴

- ۱ الف) درست (ص ۱۶) نادرست (ص ۲۴) (ب) نادرست (ص ۱۳) (پ) درست (ص ۲۹) (ت)
- ۲ الف) گنگ (ص ۵) (ص ۲۲) (ب) $a | mb$ (ص ۱۰) (پ) $|a|$ (ص ۱۳) (ت) $a \equiv \frac{m}{d} b$
- ۳ الف) درست (ص ۱۷) (ب) نادرست (ص ۸) مثال نقض $(x = 0 \leftarrow)$ (ص ۸)
- ۴ الف) عدد a شمارنده عدد b است. (ص ۹) (ب) $2m$ (ص ۱۷)
- ۵ الف) رثوس (ص ۳۵) (ص ۴۰) (ب) طوقه (ص ۳۶) (پ) مجاور (ص ۳۶) (ت) زوج
- ۶ $a \equiv b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \Rightarrow m|a^n - b^n$
 $\Rightarrow a^n \equiv b^n$ (ص ۲۹)
- ۷ $m = 17q + 5 (q \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q') - 5$ (ص ۱۴)
 $n = 17q' + 3 (q' \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q' - 1) + 12 \Rightarrow r = 12$
- ۸ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$
 نابرابری آخر برای a و b نامنفی همیشه درست است. اثبات بازگشتی و حکم برقرار است. (ص ۷)
- ۹ $2 \equiv 35 \Rightarrow 5x \equiv 35 \xrightarrow{(\div 5)} x \equiv 7 \Rightarrow x = 11k + 7$ (ص ۱۴ سوال ۳۰)
 (مشابه سوال ۱۴ ص ۳۰)
- ۱۰ $7^2 = 49 \equiv 4 \Rightarrow 7^4 \equiv 16 \equiv 1 \Rightarrow 7^{28} \equiv 1 \xrightarrow{\times 7^{15} \equiv 4} 7^{30} \equiv 4$ (ص ۹ و ۸ سوال ۲۹)
 (مشابه سوال ۸ و ۹ ص ۲۹)
- ۱۱ الف) a, c, d, b, e, a (ب)
-
- ۱۲ الف) $\delta(G) = 1$ (ب) $q = 6$ (ص ۳۷ و ۳۸)
 پ) $N_G[b] = \{b, a, c, d\}$ (ت) $x = c$ (ص ۴۱)

$$13y \equiv 7, (13 \equiv 4, 7 \equiv 16) \rightarrow 4y \equiv 16 \xrightarrow{(4,9)=1} y \equiv 4$$

$$y = 9k + 4, x = -13k - 5 \text{ (ص ۲۹)}$$

الف) ۵ نفر را به عنوان ۵ راس یک گراف جهت‌دار در نظر می‌گیریم. به طور مثال اگر نام علی در فهرست دوستان سامان وجود دارد، یک یال جهت‌دار از علی به سمت سامان رسم می‌کنیم. و برعکس اگر نام سامان در فهرست دوستان علی باشد یک یال جهت‌دار از سامان به علی رسم می‌کنیم. به همین ترتیب الی آخر پیش می‌رویم.

حداکثر تعداد یال‌ها در گراف جهت‌دار ۵ راسی $p(p-1) = 5 \times 4 = 20$ می‌باشد.

از طرفی برای هر یال دو حالت داریم (وجود داشتن یا وجود نداشتن آن یال) پس تعداد کل حالات برای آن 2^{20} می‌باشد.

ب) این قسمت هم‌چون قسمت الف است. با این تفاوت که گراف جهت‌دار نیست. پس حداکثر تعداد یال‌ها

$$\text{می‌باشد. بنابراین تعداد کل حالات } 2^{10} \text{ است.} \quad \frac{p(p-1)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$