جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
دبیرستان غیردولتی پسرانه مُوحد
منطقه ۵ شهر تهران

پایه : یازدهم رشته : ریاضی	نمونه سوالات **نام درس :** حسابان ۱	نام استاد : آقای **صوابی**

۱ در دنبالهٔ حسابی $۳, ۷, ۱۱, ۱۵, \ldots$، مجموع بیست جملهٔ اول این دنباله را به دست آورید.

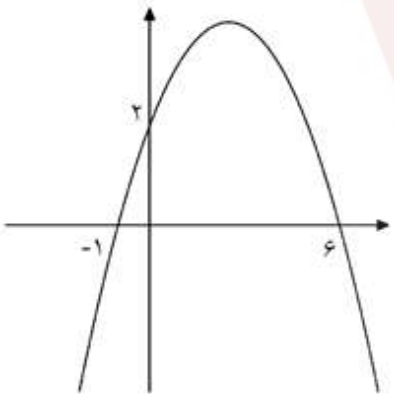
۲ مجموع حداقل چند جملهٔ دنبالهٔ زیر بزرگ‌تر از ۴۰۰ می‌باشد؟

$۱, ۲, ۴, \ldots$

۳ اگر $x-۲, x+۲, x+۱۴, \ldots$ جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند و $x-۲$ جمله اول آن باشد، جمله عمومی آن را بنویسید.

۴ مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه $S_n = ۲n^۲ + ۳n$ به دست می‌آید.
الف) جمله اول و قدر نسبت دنباله را حساب کنید.
ب) جمله عمومی دنباله حسابی را بنویسید.
ج) مجموع جملات دنباله از جمله چهارم تا جمله دهم را حساب کنید.

۵ معادله سهمی زیر را بنویسید.



۶ اگر $x = -۲$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^۳ + mx^۲ - ۱۱x - ۳۰$ باشد:
الف) مقدار m را حساب کنید.
ب) صفرهای دیگر تابع را حساب کنید.

۷ در معادلهٔ $x^۲ - x - ۵ = ۰$ اگر α و β ریشه‌ها باشند، بدون یافتن ریشه‌ها $\alpha^۲\beta + \alpha\beta^۲$ را حساب کنید.

۸ طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیواری به مساحت $۵۲/۸$ متر مربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۹ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = x^{۳} - ۴x$

ب) $g(x) = ۲x^{۳} + x^{۲} + ۳x$

پ) $h(x) = x^{۴} + ۳x^{۲} + ۵$

۱۰ اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $u(\mathrm{au}^{۲} - u - ۵) = ۲$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه‌ی دیگر را بیابید.

۱۱ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) ریشه معادله $x + \sqrt{x} = ۶$ برابر ۴ است.

ب) معادله $\sqrt{x - ۲} + \sqrt{x^{۲} - ۵\mathrm{x} + ۶} = ۰$ یک جواب حقیقی دارد.

۱۲ یک قایق با سرعت ۱۰ متر بر دقیقه در آب راکد حرکت می‌کند. اگر فاصله ۹۶ متری یک رودخانه را رفته و برگشت کند و اختلاف زمان رفت و برگشت ۴ دقیقه باشد، سرعت آب رودخانه را حساب کنید.

۱۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x - ۲} = ۵$

ب) $\sqrt{۲x + ۹} - \sqrt{x + ۱} = ۲$

۱۴ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$y = |x| + |x - ۳|$

۱۵ معادله قدر مطلق زیر را حساب کنید.

$|۲\mathrm{x} - ۱| = |x + ۵|$

۱۶ نمودار تابع $f(x) = ||x| - ۲|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = ۱$ را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

۱۷ دو معادله‌ی زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۲ - x}{|x - ۳|} = ۱$

ب) $\sqrt{x^{۲} - ۲x + ۱} = ۲x + ۱$

۱۸ حدود x را حساب کنید.

الف) $۳ < |x - ۴| < ۷$

ب) $۰ < |x - ۳| < ۵$

۱۹ اگر فاصله $A\begin{vmatrix} ۲ \\ ۱ \end{vmatrix}$ تا خط $۳x + y + m = ۰$ برابر $\sqrt{۱۰}$ باشد m را حساب کنید.

۲۰ در مثلث ABC طول ارتفاع AH را حساب کنید.

$A\begin{vmatrix} ۲ \\ ۱ \end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix} -۱ \\ ۴ \end{vmatrix} \qquad C\begin{vmatrix} ۷ \\ ۰ \end{vmatrix}$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۲۱ نقاط $A(۴,۲)$ و $B(۱,-۱)$ و $C(۶,-۱)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به‌ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشد، طول MH را به دست آورید.

۲۲ فاصله نقطه‌ی $A(-۲,۵)$ تا عمودمنصف پاره‌خط $B(-۱,۴)$ و $C(۷,۲)$ را حساب کنید.

۲۳ مساحت دایره‌ای را بیابید که مرکز آن $A(۲,-۳)$ و بر خط $۲x-y-۱=۰$ مماس باشد.

۲۴ تابع f در همه‌ی شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه‌ی آن‌را بنویسید.
الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(۲)=۳$ و $f(-۵)=-۲$
ب) f در بازه $[۰,۲]$ ثابت است.
پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن‌را نسبت می‌دهد.
ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۲۵ اگر دو تابع $f(x)=\frac{۵}{x-۲}$ و $g(x)=\frac{ax+b}{x^۲+cx+۴}$ برابر باشند، مقادیر a و b و c را بیابید.

۲۶ آیا دو تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ و $g(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$ با هم برابرند؟ چرا؟

۲۷ اگر دامنهٔ $f(x)=\frac{۵x+۱۱}{۳x^۲-ax+۲b-۱}$ برابر $R-\{۱,-۴\}$ باشد، b و a را حساب کنید.

۲۸ دامنه توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x^۳-۲۵x}$

ب) $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}+\frac{۴x-۱}{x^۲-۳x}$

۲۹ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هریک را معلوم کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x>۰\\ x-۲ & x\le ۰\end{cases}$

ب) $f(x)=\sqrt{x-۲}+۵$

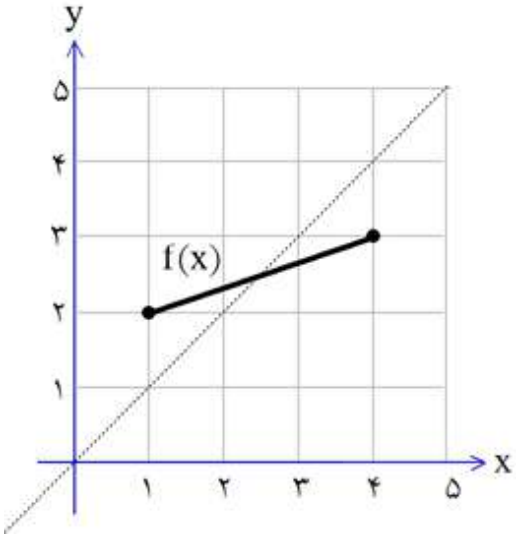
پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲ & x>۰\\ \sqrt{x+۲} & -۲\le x\le ۰\end{cases}$

ت) $f(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{x} & x<۰\\ -\sqrt{x+۲} & x\ge ۰\end{cases}$

۳۰ دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{۴-\sqrt{۲x-۳}}$ را بیابید.

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۳۱ نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.



۳۲ اگر $f = \{(۲, a^۲ + a), (۲a + ۱, ۴), (۲, ۶), (۲b - ۱, a + ۲), (-۵, ۱۹)\}$ یک تابع یک به یک باشد، a و b را حساب کنید.

۳۳ ضابطه وارون تابع $g(x) = -۵ - \sqrt{۳x + ۱}$ را به دست آورید.

۳۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h برحسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه‌ی $h(t) = ۱۰۰ - ۵t^۲$ به دست می‌آید.
الف) دامنه و برد h را به دست آورید.
ب) چرا h تابعی یک به یک است.
پ) تابع وارون h را به دست آورید.

۳۵ ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{x - ۱}{x}$ یک به یک است.

۳۶ معکوس توابع زیر را بنویسید و دامنه و برد آن‌ها را با دامنه و برد f و g مقایسه کنید.

الف) $f = \{(-۱, ۰), (۲, ۱), (۳, -۱), (-۲, ۳)\}$
ب) $g = \{(a, b), (c, d), (e, f), (g, h)\}$

۳۷ اگر $f(x + ۵) = x^۲ - ۳x$ باشد، $f(x)$ را حساب کنید.

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۳۸ با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارت‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(۲)$

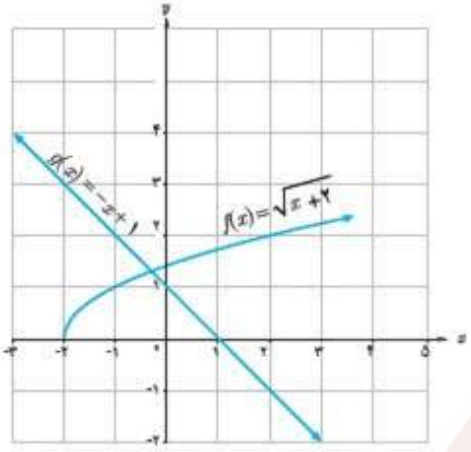
ب) $(f+g)(-۳)$

پ) $(\mathrm{fg})\left(\frac{۱}{۲}\right)$

ت) $(\mathrm{fog})(-۴)$

ث) $\left(\frac{f}{g}\right)(۰)$

ج) $(\mathrm{gof})(-۱)$



۳۹ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۵}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$، دامنه و ضابطه‌ی توابع fog و gof را به دست آورید.

۴۰ دو تابع $f(x)=۳\mathrm{x}^۲-۱$ و $g(x)=\frac{x}{x^۲-۴}$ داده شده‌اند.

الف) ضابطه‌ی تابع gof و دامنه‌ی gof را با استفاده از تعریف تعیین کنید.

ب) مقدار $(f-۳\mathrm{g})(۱)$ را محاسبه کنید.

۴۱ الف) سه عدد بین اعداد $۳^{۲/۵}$ و $۳\sqrt{۱۰}$ پیدا کنید.

ب) نامعادله‌ی توانی $۴^{۲x-۱} > \frac{۱}{۱۰۲۴}$ را حل کنید.

پ) اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، به طوری‌که $a^x > a^y > a^z$، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ $(a > ۱)$.

۴۲ الف) معادله $۶۲۵^{۳x-۱} = \left(\frac{۱}{۲۵}\right)^{۳-x}$ را حل کنید.

ب) نامعادله $۸^{۴p-۲} \le \frac{۱}{۲۵۶}$ را حل کنید.

۴۳ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $۱۶^{۱+۷n} = ۲۵۶^{۲n+۸}$

ب) $۲^{x^۲-x-۱} = ۳۲^{x-۲}$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۴۴ نمودار تابع $y = \frac{۲^{x+۱} - ۲}{۲^{x} - ۱}$ را رسم کنید.

۴۵ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $۲^{x-۱} + ۲^{x+۱} = ۴۰$

ب) $(۰/۲۵)^{x-۷} = ۱۶^{۲x}$

۴۶ دامنه تابع زیر را حساب کنید. $f(x) = \sqrt{۲ - \mathrm{Log}_{۱۱}^{(x-۱)}}$

۴۷ اگر $f(x) = \mathrm{Log}_{\sqrt[۳]{۷}}^{(x+۱)}$، مقدار $f(۴۸)$ را حساب کنید.

۴۸ دامنه‌ی تابع زیر را به دست آورده و به صورت بازه نمایش دهید. $g(x) = \mathrm{Log}_{x}(۴ - x^{۲})$

۴۹ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\mathrm{Log}_{۴} m^{۲} - \mathrm{Log}_{۴} m - ۳ = ۰$

ب) $\mathrm{Log}_{۲} (۱۲b - ۲۱) - \mathrm{Log}_{۲} (b^{۲} - ۳) = ۲$

پ) $\mathrm{Log}(x^{۲} - ۱) = -۱$

۵۰ اگر $\mathrm{Log}_{\sqrt[۴]{۳}}^{\sqrt[۳]{۲}} = a$ باشد، حاصل $\mathrm{Log}_{\sqrt[۲]{۳}}^{\sqrt[۳]{۲}}$ را برحسب a بیابید.

۵۱ از ۲۰ گرم یک عنصر پس از یک ساعت ۵ گرم باقی مانده است. نیم‌عمر این عنصر چند دقیقه است؟

۵۲ اگر $\mathrm{Log}۲ = a$ و $\mathrm{Log}۳ = b$ باشد، حاصل عبارت مقابل را بیابید. $\mathrm{Log}\sqrt{۰/۷۵}$

۵۳ اگر انرژی آزاد شده یک زلزله $۲ \times ۱۰^{۱۹}\ \mathrm{Erg}$ باشد، شدت زلزله برحسب ریشتر را حساب کنید. $(\mathrm{Log}۲ = ۰/۳)$

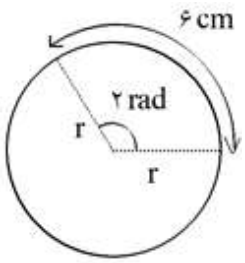
۵۴ جواب نامعادله $\mathrm{Log}_{\frac{۱}{۲}}^{(x+۷)} > \mathrm{Log}_{\frac{۱}{۲}}^{(۴x-۱)}$ را به دست آورید.

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

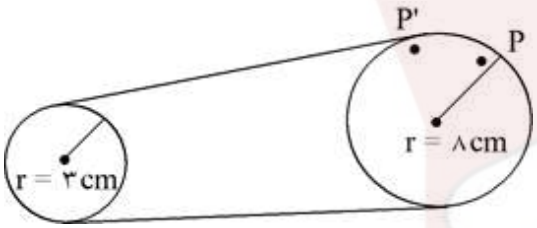
۵۵ طول برف‌پاک‌کن عقب خودرویی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف‌پاک‌کن، کمانی به اندازه 120° طی می‌کند.
$(\pi \simeq 3/14)$

الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به دست آورید.
ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف‌پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

۵۶ مساحت دایره مقابل چه‌قدر است؟



۵۷ در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های $8\ \text{cm}$ و $3\ \text{cm}$ را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقره بزرگ‌تر $\frac{\pi}{3}$ رادیان می چرخد (یعنی نقطه P در موقعیت 'P قرار می‌گیرد) قرقره کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟



٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۵۸ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\text{Sin}\,(۳۰۰^\circ) =$

ب) $\text{Cotg}\,(۷۵۰^\circ) =$

پ) $\text{Cos}\left(-\frac{\pi}{۶}\right) =$

ت) $\text{Cos}\left(-\frac{۲۳\pi}{۴}\right) =$

ث) $\text{Sin}\left(\frac{۵\pi}{۴}\right) =$

ج) $\text{tg}\,(-۸۴۰^\circ) =$

چ) $\text{tg}\,(-۱۵۰^\circ) =$

ح) $\text{Cos}\left(\frac{۹\pi}{۴}\right) =$

خ) $\text{tg}\left(\frac{۱۰\pi}{۳}\right) =$

۵۹ اگر $\text{tg}\,۲۰^\circ = ۰/۴$ باشد، حاصل $\frac{\text{Sin}\,(۱۶۰^\circ) - ۲\,\text{Cos}\,(-۲۰۰^\circ)}{\text{Cos}\,(۲۵۰^\circ) - \text{Sin}\,(۲۹۰^\circ)}$ را به دست آورید.

۶۰ آیا رابطه‌ی مقابل درست است؟ $\text{Sin}\,(۱۲۰^\circ - ۹۰^\circ) = \text{Sin}\,۱۲۰^\circ - \text{Sin}\,۹۰^\circ$

۶۱ درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$\text{Sin}\,(-۱۳۵^\circ) = \text{Sin}\,(-۴۵^\circ)\,\text{Cos}\,(-۹۰^\circ) + \text{Cos}\,(-۴۵^\circ)\,\text{Sin}\,(-۹۰^\circ)$$

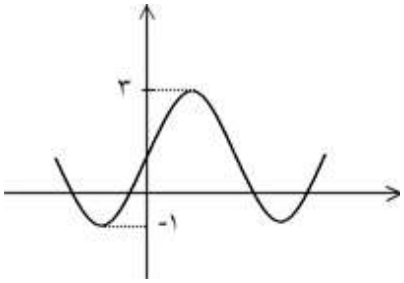
۶۲ در تابع $f(x) = ۳\,\text{Sin}\left(\frac{۵\pi}{۲} + x\right) + ۱$، مقدار تابع به ازای $x = \frac{۷\pi}{۶}$ را حساب کنید.

۶۳ نمودار $y = ۲\,\text{Cos}\,x - ۱$ را در یک بازه‌ی دلخواه به طول ۲π رسم کنید.

۶۴ اگر نمودار $y = a + b\,\text{Sin}\,x$ به صورت زیر باشد.

الف) مقدار a , b را حساب کنید.

ب) مقدار تابع به ازای $x = \frac{\pi}{۴}$ را به دست آورید.



٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۶۵ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۱ + \text{Log}_{۲}\,(x - ۱)$

ب) $y = -\,|\text{Sin}\,x| \quad (۰ \le x \le ۲\pi)$

۶۶ حاصل عبارت $۴\,\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x\,\text{Cos}\,۲x$ را به ازای $x = ۷/۵^\circ$ را محاسبه نمایید.

۶۷ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که:

الف) $\text{Sin}\,۲\alpha = ۲\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha$

ب) $\text{Cos}\,۲\alpha = \text{Cos}^{۲}\alpha - \text{Sin}^{۲}\alpha$

پ) $\text{Cos}\,۲\alpha = ۲\,\text{Cos}^{۲}\alpha - ۱$

ت) $\text{Cos}\,۲\alpha = ۱ - ۲\,\text{Sin}^{۲}\alpha$

۶۸ فرض کنید $\text{Cos}\,\alpha = \frac{۴}{۵}$ و $\text{Cos}\,\beta = \frac{-۱۲}{۱۳}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد.

مطلوبست محاسبه‌ی عددی $\text{Sin}\,(\alpha + \beta)$ و $\text{Cos}\,(\alpha - \beta)$.

۶۹ اگر داشته باشیم $\text{Cos}\,x = t$، مقدار $\text{Cos}\,۲x$ را برحسب t بنویسید.

۷۰ فرض کنید $\tan\alpha = \frac{۳}{۴}$ و α زاویه‌ی حاده باشد. حاصل $\text{Sin}\,۲\alpha$ را به‌دست آورید.

۷۱ درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\text{Sin}\,x + \text{Cos}\,x = \sqrt{۲}\,\text{Sin}\left(x + \frac{\pi}{۴}\right)$$

۷۲ $\text{Sin}\,۳\theta$ را بر حسب $\text{Sin}\,\theta$ بنویسید.

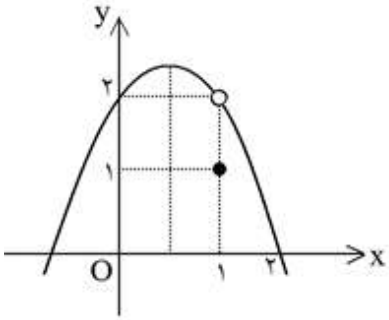
۷۳ نمودار تابعی را رسم کنید که در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست.

۷۴ تابع $f(x) = \begin{cases} (a+۱)x + ۲ & x > -۳ \\ -۲x^{۲} + b & x < -۳ \end{cases}$ مفروض است. مقادیر b و a را چنان بیابید که:

$$\lim_{x \to -۱} f(x) = -۴ \qquad \text{و} \qquad \lim_{x \to -۴} f(x) = -۱$$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

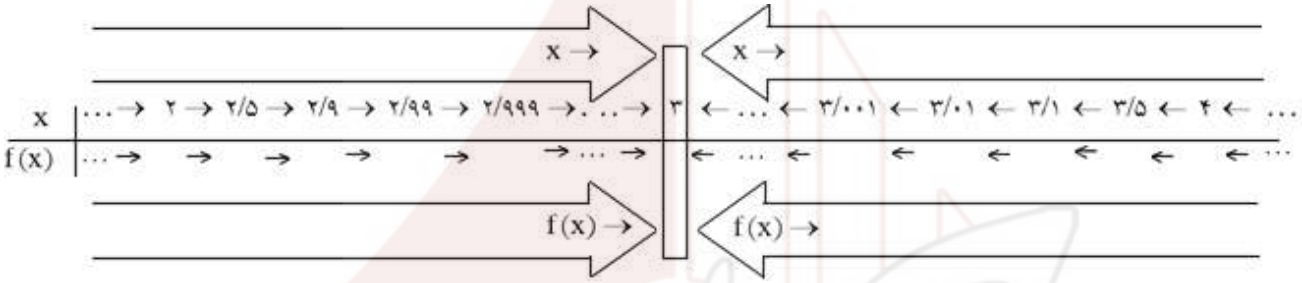
۷۵ با استفاده از نمودار، حد تابع زیر را در نقطه‌ی داده شده (در صورت وجود) مشخص کنید.



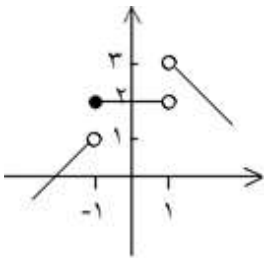
$$\lim_{x\to ۱} f(x) \quad , \quad f(x)=\begin{cases} -x^{۲}+x+۲, & x\neq ۱ \\ ۱ & , \quad x=۱ \end{cases}$$

۷۶ جدول زیر را کامل کنید، و حد هر تابع را وقتی x به سمت مقدار مورد نظر میل می‌کند، مشخص کنید (برای محاسبه می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x+۱}-۲}{x-۳}$$



۷۷ با توجه به شکل حاصل زیر را به دست آورید.



$$\lim_{x\to ۱^{+}} f(x) - \lim_{x\to (-۱)^{-}} f(x)$$

۷۸ مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x=۲$ دارای حد باشد.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۳}+۲ & x\geq ۲ \\ \frac{ax}{x-۳} & x<۲ \end{cases}$$

۷۹ نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x+۲ & x>-۲ \\ x^{۲}+۲x & x\leq -۲ \end{cases}$ را رسم کنید. حد چپ و راست تابع f را در $x=-۲$ به دست آورید. آیا تابع f در $x=-۲$ حد دارد؟ چرا؟

۸۰ حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x\to ۳} \frac{x+۳}{\sqrt{۵x+۱}}$

ب) $\lim_{x\to ۳^{-}} ([x]-۱)$

ج) $\lim_{x\to ۲} \frac{x^{۲}-۴}{x^{۲}-۷x+۱۰}$

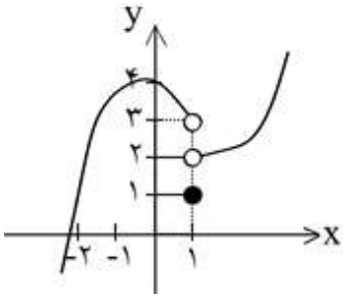
د) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\cos^{۲}x-\sin^{۲}x}{\cos x-\sin x}$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۸۱ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}[x]+b & x<۳\\ x^{۲}+۲ & x>۳\end{cases}$ در نقطه $x=۳$ دارای حد باشد.

۸۲ شکل مقابل نمودار تابع f است. حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۱^{-}} f(x)-\lim_{x\to ۱^{+}} f(x)+f(۱)$$



۸۳ حد تابع زیر را درصورت وجود، محاسبه کنید. (نماد [] جزء صحیح است.)

$$\lim_{x\to ۱}\sqrt{۱-x}$$

۸۴ مقدار a را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}[x]-۲x & x\geqslant ۲\\ \frac{ax^{۲}+۲}{x-۳} & x<۲\end{cases}$ در $x=۲$ حد داشته باشد. ([] نماد جزء صحیح است.)

۸۵ تابع $f(x)=\begin{cases}۲x^{۲}-۳a & x<۱\\ x-a & ۱<x<۴\\ ۵x^{۲}+bx+۴ & ۴<x\end{cases}$ مفروض است. عددهای a و b را چنان بیابید که تابع f در نقطه $x=۴$ دارای حد بوده و $\lim_{x\to ۱^{-}} f(x)=۲$ باشد.

۸۶ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax+b & x\geqslant ۱\\ ax^{۲}+۴ & x<۱\end{cases}$ مفروض است. ضرایب b,a را چنان بیابید که $\lim_{x\to ۱} f(x)=۷$ باشد.

۸۷ اگر تابع f در نقطه ۴ حد داشته باشد و $\lim_{x\to ۴}(f(x)-x+۷)=۲$، حاصل $\lim_{x\to ۴} f(x)$ را حساب کنید.

۸۸ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to ۹}(\sqrt{x}-۹)^{۳}$

ب) $\lim_{x\to -۱}(-۶x^{۷}-۴x^{۲}+۵)$

پ) $\lim_{x\to -\frac{۵}{۳}}\frac{(x+\pi)(۳x+۵)}{(۳x+۶)(x^{۳}+۱)}$

ت) $\lim_{x\to \sqrt{۲}^{+}}\frac{۱-x^{۲}}{x^{۲}-۴}$

ث) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}\sqrt{۴x^{۲}+۶x}$

ج) $\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\sin x}{x+\cos x}$

چ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{|\cos x|}{x-\pi}$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۸۹ اگر $\lim\limits_{x\to ۳} f(x) = ۲$ و $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{۳f(x)-۱}{۲f(x)+۵}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{f(x)-۱}{f(x)+۷}$ را حساب کنید.

۹۰ اگر $f(x)=\begin{cases} ax^۲+۳x & x>۲ \\ x^۳+۴b & x<۲ \end{cases}$ در $x=۲$ دارای حد باشد $a-b$ را حساب کنید.

۹۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{۱-\sin x}{\cos x}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)}{\cos x-\sin x}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{x^۲}{|۱-\cos x|}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۲-۲\cos ۲x}{x\sin x}$

ث) $\lim\limits_{x\to -\pi} \dfrac{\cos x+۱}{x+\pi}$

ج) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)}{۶x-۲\pi}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}$

۹۲ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{۲x^۲+x-۱}{۳x^۲+۳x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{x^۲[x]-۸}{x-۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{\sqrt{x+۲}-۲}{x^۲-۴}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x^۲+x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}$

۹۳ حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x-\sqrt{x}}{۲-\sqrt{x+۳}}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x-\sqrt{۲x+۳}}{\sqrt{x+۱}-۲}$

۹۴ مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x=۱$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} & ۰\leqslant x<۱ \\ [x]+a & x\geqslant ۱ \end{cases}$$

۹۵ حد مقابل را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x \sin ۲x \sin ۳x}{x^۳}$$

۹۶ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y=|x-۱|+۲$

ب) $y=x-[x]$

پ) $y=[x]+[-x]$

ت) $y=\begin{cases} x(x-۱) & x\leq ۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۹۷ مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+۳ & x>۲ \\ ۷ & x=۲ \\ \frac{b}{x-۱}-۱ & x<۲ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۲$ پیوسته باشد.

۹۸ مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع زیر در $x=۳$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ۲[x]+۳a & x>۳ \\ \cos(x-۳) & x=۳ \\ \frac{|x-۳|}{x^{۲}-۹}+b & x<۳ \end{cases}$$

۹۹ پیوستگی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \frac{۳x+[x]+۱}{۲} & x<۲ \\ x+۲ & x=۲ \\ \frac{x^{۲}-۴}{x-۲} & x>۲ \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=۲$ بررسی نمایید.

۱۰۰ نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\frac{۳-\sqrt{x+۹}}{x+۹}$ را در دامنه‌اش تعیین کنید.

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۱ $S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}\left[(۲\times۳)+(۱۹\times۴)\right] = ۱۰\times(۶+۷۶) = ۸۲۰$

۲ $S_n = \frac{a_۱(q^n-۱)}{q-۱} \Rightarrow \frac{۱(۲^n-۱)}{۲-۱} > ۴۰۰ \Rightarrow ۲^n > ۴۰۱ \Rightarrow n \geqslant ۹$

بنابراین حداقل نه جمله باید جمع شود تا حاصل بزرگ‌تر از ۴۰۰ شود.

۳ اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه:

$b^۲ = ac \Rightarrow (x+۲)^۲ = (x-۲)(x+۱۴) \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۴ = x^۲ + ۱۲x - ۲۸$

$\Rightarrow -۸x = -۳۲ \Rightarrow x = ۴$

$\xrightarrow{x=۴} ۲, ۶, ۱۸, \cdots \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = ۲ \\ r = ۳ \end{cases}$

$a_n = a_۱ r^{n-۱} \Rightarrow a_n = ۲(۳)^{n-۱}$

۴ الف)

$$\begin{cases} a_۱ = S_۱ = ۲ + ۳ = ۵ \\ a_۲ = S_۲ - S_۱ = ۱۴ - ۵ = ۹ \Rightarrow d = a_۲ - a_۱ = ۹ - ۵ = ۴ \end{cases}$$

ب) $a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow a_n = ۵ + (n-۱)(۴) \Rightarrow a_n = ۴n + ۱$

ج) $a_۴ + a_۵ + \cdots a_{۱۰} = S_{۱۰} - S_۳ = ۲۳۰ - ۲۷ = ۲۰۳$

۵ در نمودار محل برخورد با محور x ها معلوم است. بنابراین از ضابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$y = a(x - x_۱)(x - x_۲) \Rightarrow y = a(x+۱)(x-۶)$

سهمی محور y ها را در نقطه $A(۰, ۲)$ قطع کرده است. بنابراین:

$A(۰, ۲) \Rightarrow ۲ = a(۰+۱)(۰-۶) \Rightarrow ۲ = -۶a \Rightarrow a = -\frac{۱}{۳}$

$y = -\frac{۱}{۳}(x+۱)(x-۶) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}(x^۲ - ۵x - ۶) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}x^۲ + \frac{۵}{۳}x + ۲$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۶ الف) باید به جای x عدد ۲- قرار دهیم و برابر صفر می‌گذاریم.

$$\xrightarrow{x=-۲} -۸ + ۴m + ۲۲ - ۳۰ = ۰ \Rightarrow ۴m = ۱۶ \Rightarrow m = ۴$$

ب)

$$f(x) = x^۳ + ۴x^۲ - ۱۱x - ۳۰$$

بر عامل صفر یعنی $x + ۲$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^۳ + ۴x^۲ - ۱۱x - ۳۰ & x + ۲ \\ \hline x^۳ + ۲x^۲ & x^۲ + ۲x - ۱۵ \\ \hline ۲x^۲ - ۱۱x - ۳۰ & \\ ۲x^۲ + ۴x & \\ \hline -۱۵x - ۳۰ & \\ -۱۵x - ۳۰ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$x^۲ + ۲x - ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x+۵)(x-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۵ \\ x = ۳ \end{cases}$$

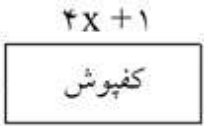
بنابراین صفرهای دیگر تابع ۵- و ۳ است.

۷

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = ۱ \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۵ \end{cases}$$

$$\alpha^۲\beta + \alpha\beta^۲ = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -۵ \times ۱ = -۵$$

۸



مساحت یک کفپوش : $x(۴x+۱) = ۴x^۲ + x$

$$۲۰۰۰(۴x^۲ + x) = ۵۲۸۰۰۰ \Rightarrow ۴x^۲ + x = ۲۶۴ \Rightarrow ۴x^۲ + x - ۲۶۴ = ۰$$

$$\Rightarrow \Delta = ۴۲۲۵ \Rightarrow x = \frac{-۱ \pm ۶۵}{۸} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{۶۶}{۸} & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{۶۴}{۸} = ۸ & \text{ق ق} \end{cases}$$

طول هر کاشی ۳۳ سانتی‌متر است. طول کاشی $= ۴x + ۱ = ۳۳$

۹

الف) $f(x) = x^۳ - ۴x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲ \end{cases}$

ب) $g(x) = ۲x^۳ + x^۲ + ۳x = ۰ \Rightarrow x(۲x^۲ + x + ۳) = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ ۲x^۲ + x + ۳ = ۰ : \Delta = b^۲ - ۴ac = ۱ - ۲۴ = -۲۳ \end{cases}$$

پ) $h(x) = x^۴ + ۳x^۲ + ۵$ ریشه حقیقی ندارد

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۱۰

$u = ۲ \Rightarrow ۲(۴a - ۲ - ۵) = ۲ \xrightarrow{\div ۲} ۴a - ۷ = ۱ \Rightarrow a = ۲$

$u(۲u^۲ - u - ۵) = ۲ \Rightarrow ۲u^۳ - u^۲ - ۵u - ۲ = ۰ \Rightarrow (u - ۲)(۲u^۲ + ۳u + ۱) = ۰ \Rightarrow S = -\frac{۳}{۲}$

۱۱ الف) درست

ب) درست

۱۲

$x(\text{مسافت طی شده}) = V(\text{سرعت}).\, t(\text{زمان}) \Rightarrow t = \frac{x}{V}$

$t_{\text{رفت}} - t_{\text{برگشت}} = ۴ \Rightarrow \frac{۹۶}{۱۰ - V} - \frac{۹۶}{۱۰ + V} = ۴ \xrightarrow{\div ۴} \frac{۲۴}{۱۰ - V} - \frac{۲۴}{۱۰ + V} = ۱$

$\xrightarrow{\times (۱۰ - V)(۱۰ + V)} ۲۴(۱۰ + V) - ۲۴(۱۰ - V) = ۱۰۰ - V^۲ \Rightarrow \cancel{۲۴۰} + ۲۴V - \cancel{۲۴۰} + ۲۴V$

$= ۱۰۰ - V^۲ \Rightarrow V^۲ + ۴۸V - ۱۰۰ = ۰ \Rightarrow (V + ۵۰)(V - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} V = ۲ & \text{ق ق} \\ V = -۵۰ & \text{غ ق ق} \end{cases}$

۱۳

الف) $x - ۲ + x = ۵x(x - ۲) \Rightarrow ۵x^۲ - ۱۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۶ + \sqrt{۲۶}}{۵}$ و $\frac{۶ - \sqrt{۲۶}}{۵}$

ب) $\sqrt{۲x + ۹} = ۲ + \sqrt{x + ۱} \xrightarrow{\text{به توان می رسانیم}^۲} ۲x + ۹ = ۴ + x + ۱ + ۴\sqrt{x + ۱}$

$\Rightarrow x + ۴ = ۴\sqrt{x + ۱} \xrightarrow{\text{به توان می رسانیم}^۲} x^۲ + ۸x + ۱۶ = ۱۶x + ۱۶$

$\Rightarrow x^۲ - ۸x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{ق ق} \\ x = ۸ & \text{ق ق} \end{cases}$

۱۴

$x \geq ۳ \Rightarrow y = x + x - ۳ = ۲x - ۳$

$۰ \leq x < ۳ \Rightarrow y = x - x + ۳ = ۳$

$x < ۰ \Rightarrow y = -x - x + ۳ = -۲x + ۳$

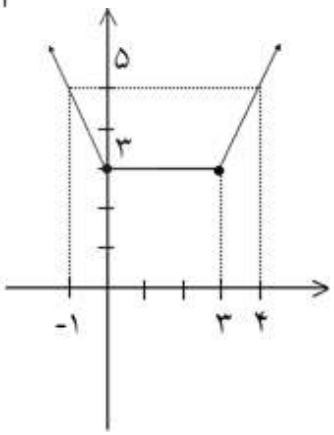
x	۰	۳
x	- ● +	+
x - ۳	-	- ● +

$$y = \begin{cases} ۲x - ۳ & x \geq ۳ \\ ۳ & ۰ \leq x < ۳ \\ -۲x + ۳ & x < ۰ \end{cases}$$

x	۳	۴
y	۳	۵

x	۰	۳
y	۳	۳

x	۰	-۱
y	۳	۵



٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

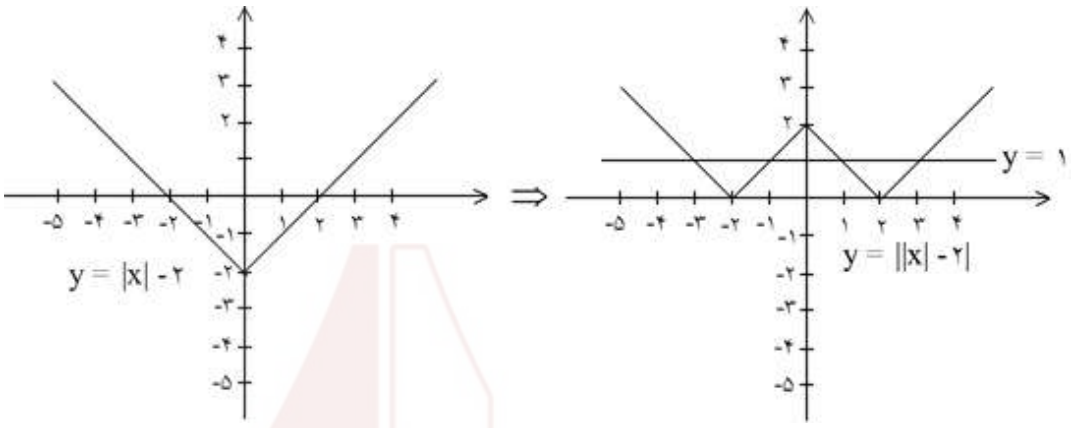
۱۵

$|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$

$|۲x - ۱| = |x + ۵| \Rightarrow ۲x - ۱ = \pm(x + ۵)$

$$\begin{cases} ۲x - ۱ = x + ۵ \Rightarrow x = ۶ \\ ۲x - ۱ = -x - ۵ \Rightarrow ۳x = -۴ \Rightarrow x = -\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

۱۶



با توجه به نمودار معادله ۴ جواب دارد: $۳, ۱, -۱, -۳$

روش جبری:

$$||x| - ۲| = ۱ \Rightarrow \begin{cases} |x| - ۲ = ۱ \Rightarrow |x| = ۳ \Rightarrow x = \pm ۳ \\ |x| - ۲ = -۱ \Rightarrow |x| = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \end{cases}$$

۱۷

الف) $\frac{۲ - x}{|x - ۳|} = ۱ \xrightarrow{x \neq ۳} |x - ۳| = \overbrace{۲ - x}^{\text{نامنفی}} \Rightarrow \begin{cases} x - ۳ = ۲ - x \Rightarrow ۲x = ۵ \Rightarrow x = \frac{۵}{۲} \text{ غ ق ق} \\ x - ۳ = -۲ + x \Rightarrow -۳ = -۲ \text{ غیر ممکن هست} \end{cases}$

در نتیجه معادله جوابی ندارد.

ب) $\sqrt{x^۲ - ۲x + ۱} = ۲x + ۱ \Rightarrow \sqrt{(x - ۱)^۲} = ۲x + ۱ \Rightarrow |x - ۱| = \overbrace{۲x + ۱}^{\text{نامنفی}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۲x + ۱ \Rightarrow x = -۲ \text{ غ ق ق} \\ x - ۱ = -۲x - ۱ \Rightarrow ۳x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ ق ق} \end{cases}$$

تذکر: معادلات بالا را می‌توان به روش‌های زیر هم حل نمود:

۱- با استفاده از تعریف قدرمطلق

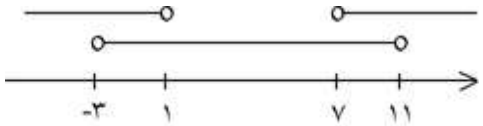
۲- با به توان ۲ رساندن دو طرف معادله

۳- به روش هندسی

۱۸

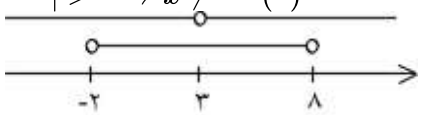
الف) $۳ < |x - ۴| < ۷ \Rightarrow \begin{cases} |x - ۴| < ۷ \Rightarrow -۷ < x - ۴ < ۷ \xrightarrow{+۴} -۳ < x < ۱۱ \quad (۱) \\ |x - ۴| > ۳ \Rightarrow x - ۴ > ۳ \text{ یا } x - ۴ < -۳ \Rightarrow x > ۷ \text{ یا } x < ۱ \quad (۲) \end{cases}$

$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)}$ جواب $= (-۳, ۱) \cup (۷, ۱۱)$



ب) $۰ < |x - ۳| < ۵ \Rightarrow \begin{cases} |x - ۳| < ۵ \Rightarrow -۵ < x - ۳ < ۵ \Rightarrow -۲ < x < ۸ \quad (۱) \\ |x - ۳| > ۰ \Rightarrow x \neq ۳ \quad (۲) \end{cases}$

$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)}$ جواب $(-۲, ۸) - \{۳\}$



٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۱۹ $d=\frac{|۳(۲)+۱+m|}{\sqrt{۳^۲+۱^۲}}=\frac{|m+۷|}{\sqrt{۱۰}}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow|m+۷|=۱۰$

$$m+۷=\pm۱۰\Rightarrow\begin{cases}m=۳\\m=-۱۷\end{cases}$$

۲۰ ۱) معادله خط BC را حساب کنیم.

$$m_{BC}=\frac{۰-۴}{۷-(-۱)}=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow y-۰=\frac{-۱}{۲}(x-۷)\Rightarrow ۲y=-x+۷\Rightarrow x+۲y-۷=۰$$

۲) فاصله نقطه A تا خط BC (فرمول d)

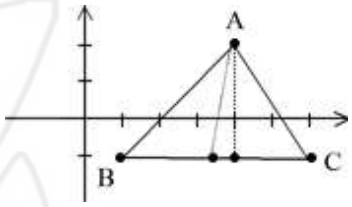
$$d=\frac{|۲+۲-۷|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{۳}{\sqrt{۵}}$$

۲۱ با توجه به شکل روبه‌رو BC موازی محور طول‌ها و AH عمود بر آن است، لذا می‌توان مختصات نقطه‌ی H را به صورت زیر به دست آورد:

$$H\left|\begin{matrix}۴\\-۱\end{matrix}\right.$$

هم‌چنین M وسط BC است، پس:

$$M\left|\begin{matrix}\frac{۶+۱}{۲}=\frac{۷}{۲}\\\frac{-۱+(-۱)}{۲}=-۱\end{matrix}\right.\Rightarrow M\left|\begin{matrix}\frac{۷}{۲}\\-۱\end{matrix}\right.\Rightarrow \mathrm{MH}=\left|۴-\frac{۷}{۲}\right|=\frac{۱}{۲}$$



۲۲ $m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{۴-۲}{-۱-۷}=\frac{۲}{-۸}=-\frac{۱}{۴}\xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}}m'=۴$

$$M\left|\begin{matrix}x_M=\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{۷-۱}{۲}=۳\\y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{۴+۲}{۲}=۳\end{matrix}\right.$$

$$y-y_M=m'(x-x_M)\Rightarrow y-۳=۴(x-۳)\Rightarrow y-۳=۴x-۱۲\Rightarrow ۴x-y-۹=۰$$

$$d=\frac{|\mathrm{ax}_۱+\mathrm{by}_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۸-۵-۹|}{\sqrt{۱۶+۱}}=\frac{۲۲}{\sqrt{۱۷}}$$

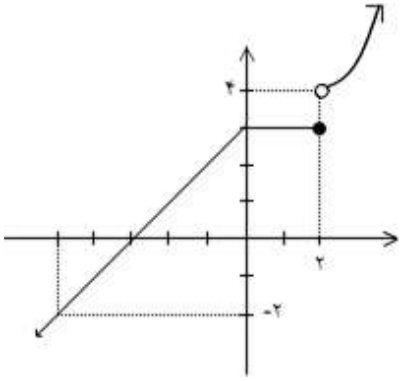
۲۳ اگر فاصله‌ی مرکز تا خط را حساب کنیم طول شعاع را حساب کرده‌ایم.

$$d=\frac{|\mathrm{ax}_۱+\mathrm{by}_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲(۲)-(-۳)-۱|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۵}}$$

(شعاع دایره) $r=\frac{۶}{\sqrt{۵}}$

مساحت دایره $S=\pi \mathrm{r}^۲=\pi\times\frac{۳۶}{۵}=\frac{۳۶\pi}{۵}$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰



$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x>۲ \\ ۳ & ۰\le x\le ۲ \\ x+۳ & x<۰ \end{cases}$$

۲۴

$$D_f=R-\{۲\}$$

۲۵

$$x^{۲}+\mathrm{cx}+۴=(x-۲)^{۲}\Rightarrow c=-۴$$

$$g(x)=f(x)\Rightarrow\frac{\mathrm{ax}+b}{(x-۲)^{۲}}=\frac{۵}{(x-۲)}\Rightarrow \mathrm{ax}+b=۵(x-۲)$$

$$\Rightarrow \mathrm{ax}+\mathrm{b}=۵\mathrm{x}-۱۰ \begin{cases} \mathrm{a}=۵ \\ \mathrm{b}=-۱۰ \end{cases}$$

۲۶ دامنه‌ی تابع f برابر $R-\{۰\}$ و دامنه‌ی تابع g نیز برابر $R-\{۰\}$ می‌باشد. پس $D_f=D_g$ و در نتیجه شرط اول تساوی دو تابع برقرار است.

$$|x|=\begin{cases} x & x\ge ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{|x|}{x}\xrightarrow{x\neq ۰}\begin{cases} \frac{x}{x} & x>۰ \\ \frac{-x}{x} & x<۰ \end{cases}=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}=g(x)$$

پس شرط دوم تساوی دو تابع نیز برقرار است و در نتیجه دو تابع f و g با هم برابرند.

۲۷

$$\begin{cases} x=۱\Rightarrow x-۱=۰ \\ x=-۴\Rightarrow x+۴=۰ \end{cases}\xrightarrow{\times}(x-۱)(x+۴)=x^{۲}+۳\mathrm{x}-۴=۰$$

$$\xrightarrow{\times ۳}۳\mathrm{x}^{۲}+۹\mathrm{x}-۱۲=۰\Rightarrow\begin{cases} -a=۹\Rightarrow a=-۹ \\ ۲\mathrm{b}-۱=-۱۲\Rightarrow ۲\mathrm{b}=-۱۱\Rightarrow b=-\frac{۱۱}{۲} \end{cases}$$

۲۸

الف)
$$D_f: x^{۳}-۲۵x\ge ۰\Rightarrow\begin{cases} x=۰ \\ x=۵ \\ x=-۵ \end{cases}$$

$$p=x^{۳}-۲۵x$$

x	$-\infty$	-۵	۰	۵	$+\infty$
x	-	-	+	+	
$\mathrm{x}^{۲}$ - ۲۵	+	-	-	+	
p	-	+	-	+	
p ≥ ۰		ج		ج	

ج ج ج

$$D_f=[-۵,۰]\cup[۵,+\infty)$$

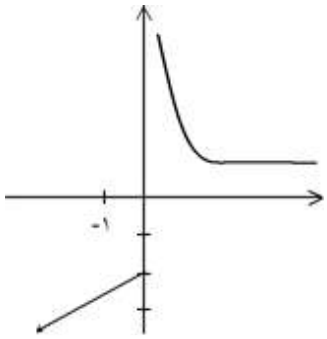
ب)
$$D_g:\begin{cases} x^{۲}-۱\neq ۰\Rightarrow x\neq\pm ۱ \\ x^{۲}-۳x\neq ۰\Rightarrow x\neq ۰,۳ \end{cases}\Rightarrow D_g=R-\{۰,۳,\pm ۱\}$$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۲۹

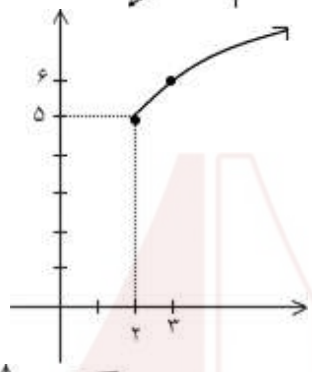
الف) $D = R$

برد $\left(-\infty , -۲\right] \cup (۰, +\infty)$



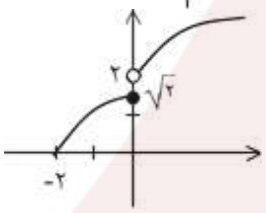
ب) $D = \left[۲ , +\infty\right)$

برد $\left[۵ , +\infty\right)$



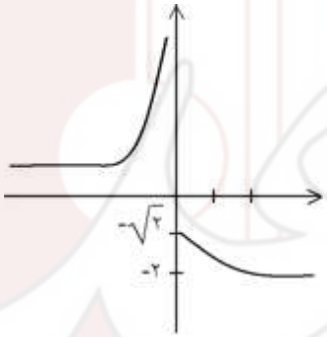
پ) $D = \left[-۲ , +\infty\right)$

برد $(۲ , +\infty) \cup \left[۰ , \sqrt{۲}\right]$



ت) $D = R$

برد $(۰, \infty) \cup \left(-\infty , -۲\right]$



۳۰

(۱) $۲x - ۳ \geq ۰ \Rightarrow x \geq \frac{۳}{۲}$

(۲) $۴ - \sqrt{۲x - ۳} \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{۲x - ۳} \leq ۴ \Rightarrow ۰ \leq ۲x - ۳ \leq ۱۶ \Rightarrow \frac{۳}{۲} \leq x \leq \frac{۱۹}{۲}$

$۱ \cap ۲ = \left[\frac{۳}{۲}, \frac{۱۹}{۲}\right]$

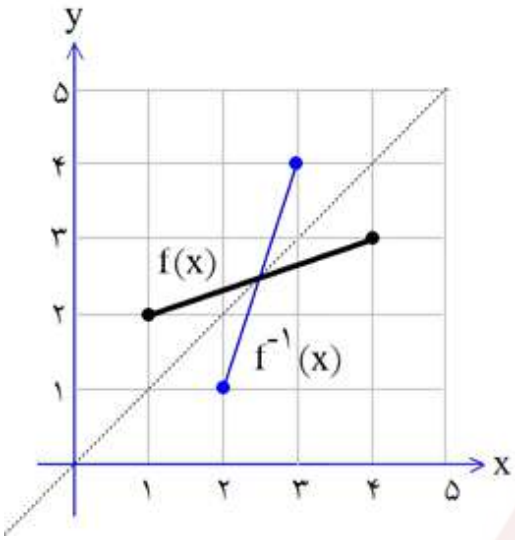
٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۳۱ تابع f از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۴,۳)$ می‌گذرد. بنابراین برای تابع وارون داریم:

$(۱,۲)\in f \Rightarrow (۲,۱)\in f^{-۱}$

$(۴,۳)\in f \Rightarrow (۳,۴)\in f^{-۱}$

بنابراین نمودار $f^{-۱}(x)$ به صورت زیر است.



۳۲ $a^۲+a=۶ \Rightarrow a^۲+a-۶=۰ \Rightarrow (a+۳)(a-۲)=۰$

$$\begin{cases} a=-۳ & \text{غ ق ق} \\ a=۲ & \text{ق ق} \end{cases}$$

$a=-۳ \Rightarrow f=\{(۲,۶),(-۵,۴),(۲,۶),(۲b-۱,-۱),(-۵,۱۹)\}$

به ازای $a=-۳$ تابع نیست.

$a=۲ \Rightarrow f=\{(۲,۶),(۵,۴),(۲,۶),(۲b-۱,۴),(-۵,۱۹)\}$

$\Rightarrow ۲b-۱=۵ \Rightarrow ۲b=۶ \Rightarrow b=۳$

بنابراین $a=۲$ و $b=۳$ است.

۳۳ $-۵-\sqrt{۳x+۱}=y \Rightarrow ۳x+۱=(y+۵)^۲ \Rightarrow x=\dfrac{(y+۵)^۲-۱}{۳} \Rightarrow g^{-۱}(x)=\dfrac{(x+۵)^۲-۱}{۳}$

$D_{g^{-۱}}=(-\infty,-۵]$

۳۴ الف) $D_h=[۰,\sqrt{۲۰}), R_h=[۰,۱۰۰]$

ب) چون به هر ارتفاع از برد زمان منحصر به فردی از دامنه نظیر می‌شود.

پ) $y=۱۰۰-۵x^۲ \Rightarrow y-۱۰۰=۵x^۲ \Rightarrow \dfrac{y-۱۰۰}{۵}=x^۲ \Rightarrow x=+\sqrt{\dfrac{y-۱۰۰}{۵}}$

۳۵ پس تابع یک به یک است.

$f(x_۱)=f(x_۲) \Rightarrow \dfrac{x_۱-۱}{x_۱}=\dfrac{x_۲-۱}{x_۲} \Rightarrow x_۱x_۲-x_۲=x_۱x_۲-x_۱ \Rightarrow x_۱=x_۲$

(۰/۲۵) (۰/۵) (۰/۲۵)

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۳۶ الف) $f^{-۱} = \{(۰,-۱)(۱,۲)(-۱,۳)(۳,-۲)\}$

دامنه f = برد $f^{-۱} = \{-۱,۲,۳,-۲\}$

دامنه $f^{-۱}$ = برد $f = \{۰,۱,-۱,۳\}$

ب) $g^{-۱} = \{(b,a)\ ،(d,c)\ ،(f,e)\ ،(h,g)\}$

دامنه $g^{-۱}$ = برد $g = \{a,c,e,g\}$

دامنه g = برد $g^{-۱} = \{b,d,f,h\}$

۳۷ $x+۵=t \Rightarrow x=t-۵ \Rightarrow f(t)=(t-۵)^{۲}-۳(t-۵) \Rightarrow f(t)=t^{۲}-۱۰t+۲۵-۳t+۱۵$

$\Rightarrow f(t)=t^{۲}-۱۳t+۴۰ \Rightarrow f(x)=x^{۲}-۱۳x+۴۰$

۳۸ الف) $f(۲)+g(۲)=۲-۱=۱$

ب) $f(-۳)+g(-۳)=$ تعریف نشده وجود ندارد

پ) $f\left(\frac{۱}{۲}\right)\times g\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۵}{۲}}$

ت) $f(g(-۴))=f(۵)=\sqrt{۷}$

ث) $\frac{f(۰)}{g(۰)}=\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

ج) $g(f(-۱))=g(۱)=۰$

۳۹ $D_f=R \qquad x-x^{۲}\geq ۰ \qquad D_g=[-۲,۲]$

$\text{fog}\,(x)=\sqrt{(\sqrt{۴-x^{۲}})^{۲}+۵}=\sqrt{۹-x^{۲}}$

$D_{\text{fog}\,(x)}=\{x\in D_g \mid g\in D_f\}=\left\{x\in[-۲,۲]\mid \sqrt{۴-x^{۲}}\in R\right\}=[-۲,۲]$

$\text{gof}\,(x)=\sqrt{۴-(\sqrt{x^{۲}+۵})^{۲}}=\sqrt{۴-x^{۲}-۵}=\sqrt{-x^{۲}-۱}$

$D_{\text{gof}}=\{x\in D_f \mid f\in D_f\}=\left\{x\in R\mid \sqrt{x^{۲}+۵}\in[-۲,۲]\right\}=\emptyset$

چون اگر $۲\leq \sqrt{x^{۲}+۵}\leq -۲ \Longleftarrow ۴\leq x^{۲}+۵<۰$ که درست نمی‌باشد.

۴۰ الف) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(۳x^{۲}-۱)=\frac{۳x^{۲}-۱}{(۳x^{۲}-۱)^{۲}-۴}$ (۰/۲۵)

$D_f=R$ (۰/۲۵) و $D_g=R-\{\pm ۲\}$ (۰/۲۵)

$D_{\text{gof}}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\left\{x\in R\mid ۳x^{۲}-۱\neq \pm ۲\right\}=R-\{\pm ۱\}$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

ب) $(f-۳g)(۱)=f(۱)-۳g(۱)=۲-۳\left(-\frac{۱}{۳}\right)=۳$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۴۱

الف) $۳\sqrt{۸}, ۳\sqrt{۷}, ۳\sqrt{۶}$

ب) $۲^{۴x-۲} > ۲^{-۱۰} \Rightarrow ۴x-۲ > -۱۰ \Rightarrow ۴x > -۸ \Rightarrow x > -۲$

پ) $x > y > z$

۴۲

الف) $۵^{-۶+۲x} = ۵^{۱۲x-۴} \Rightarrow -۶+۲x = ۱۲x-۴ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۵}$

ب) $۲^{-۸} \le ۲^{۱۲p-۶} \Rightarrow -۸ \le ۱۲p-۶ \Rightarrow p \ge \frac{-۱}{۶}$

۴۳

الف) $۱۶^{۱+۷n} = ۲۵۶^{۲n+۸} \Rightarrow (۲^{۴})^{۱+۷n} = (۲^{۸})^{۲n+۸} \Rightarrow ۲^{۴+۲۸n} = ۲^{۱۶n+۶۴}$

$\Rightarrow ۴+۲۸n = ۱۶n+۶۴ \Rightarrow ۱۲n = ۶۰ \Rightarrow n = ۵$

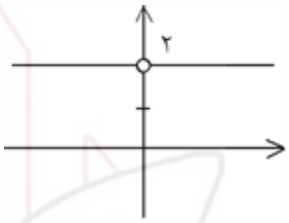
ب) $۲^{x^{۲}-x-۱} = (۲^{۵})^{x-۲} \Rightarrow ۲^{x^{۲}-x-۱} = ۲^{۵x-۱۰} \Rightarrow x^{۲}-x-۱ = ۵x-۱۰$

$\Rightarrow x^{۲}-۶x+۹ = ۰ \Rightarrow (x-۳)^{۲} = ۰ \Rightarrow x = ۳$

۴۴

$۲^{x}-۱ \neq ۰ \Rightarrow ۲^{x} \neq ۱ \Rightarrow x \neq ۰ \Rightarrow D = R-\{۰\}$

$y = \frac{۲^{x+۱}-۲}{۲^{x}-۱} = \frac{۲\times ۲^{x}-۲}{۲^{x}-۱} = \frac{۲(۲^{x}-۱)}{۲^{x}-۱} = ۲ \Rightarrow y = ۲$



۴۵

الف) $۲^{x-۱}+۲^{x+۱} = \frac{۲^{x}}{۲}+۲\times ۲^{x} = ۴۰ \Rightarrow ۲^{x}\left(\frac{۱}{۲}+۲\right) = ۴۰ \Rightarrow \frac{۵}{۲}\times ۲^{x} = ۴۰ \Rightarrow ۲^{x} = ۱۶$

$\Rightarrow ۲^{x} = ۲^{۴} \Rightarrow x = ۴$

ب) $(۰/۲۵)^{x-۷} = ۱۶^{۲x} \Rightarrow (۲^{-۲})^{x-۷} = (۲^{۴})^{۲x} \Rightarrow ۲^{-۲x+۱۴} = ۲^{۸x}$

$\Rightarrow -۲x+۱۴ = ۸x \Rightarrow ۱۰x = ۱۴ \Rightarrow x = ۱/۴$

۴۶

$x-۱ > ۰ \Rightarrow x > ۱ \quad (۱)$

$۲ - \text{Log}_{۱۱}^{(x-۱)} \ge ۰ \Rightarrow \text{Log}_{۱۱}^{(x-۱)} \le ۲ \Rightarrow x-۱ \le ۱۲۱ \Rightarrow x \le ۱۲۲ \quad (۲)$

$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} D_f = \left(۱, ۱۲۲\right]$

۴۷

$f(۴۸) = \text{Log}_{\sqrt[۳]{۷}}^{(۴۸+۱)} = \text{Log}_{\sqrt[۳]{۷}}^{۴۹} = \text{Log}_{۷^{\frac{۱}{۳}}}^{۷^{۲}} = \frac{۲}{\frac{۱}{۳}}\text{Log}_{۷}^{۷} = ۶$

۴۸

$D_g : \begin{cases} ۴-x^{۲} > ۰ \Rightarrow x^{۲} < ۴ \Rightarrow -۲ < x < ۲ \\ x > ۰ \text{ و } x \neq ۱ \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_g = (۰, ۲) - \{۱\}$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۴۹

الف) $۲\,\mathrm{Log}_{۴}^{m} - \mathrm{Log}_{۴}^{m} - ۳ = ۰ \Rightarrow \mathrm{Log}_{۴}^{m} = ۳ \Rightarrow m = ۴^{۳} = ۶۴$

ب) $\mathrm{Log}_{۲} \frac{۱۲b - ۲۱}{b^{۲} - ۳} = ۲ \Rightarrow \frac{۱۲b - ۲۱}{b^{۲} - ۳} = ۴ \Rightarrow ۱۲b - ۲۱ = ۴b^{۲} - ۱۲ \Rightarrow ۴b^{۲} - ۱۲b + ۹ = ۰$

$\Rightarrow (۲b - ۳)^{۲} = ۰ \Rightarrow b = \frac{۳}{۲}$ غ ق ق

پ) $x^{۲} - ۱ = ۱۰ \Rightarrow x^{۲} = ۱۱ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۱۱}$

۵۰

$\mathrm{Log}_{\sqrt{۳}}^{۴} = a \Rightarrow ۴\,\mathrm{Log}_{۳}^{۲} = a \Rightarrow \mathrm{Log}_{۳}^{۲} = \frac{a}{۴}$

$\mathrm{Log}_{۲\sqrt{۳}}^{۳\sqrt{۲}} = \frac{\mathrm{Log}_{۳}^{۱۸}}{\mathrm{Log}_{۳}^{۱۲}} = \frac{۲ + \mathrm{Log}_{۳}^{۲}}{۱ + ۲\,\mathrm{Log}_{۳}^{۲}} = \frac{۲ + \frac{a}{۴}}{۱ + \frac{۲a}{۴}} = \frac{۸ + a}{۴ + ۲a}$

۵۱

$Q(t) = A\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{t}{T}} \xrightarrow{A=۲۰\,,\,t=۶۰\,,\,Q(۶۰)=۵} Q(۶۰) = ۲۰\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۶۰}{T}} = ۵$

$\Rightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۶۰}{T}} = \frac{۱}{۴} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} \Rightarrow \frac{۶۰}{T} = ۲ \Rightarrow T = ۳۰$

۵۲

$\mathrm{Log}\,۲ = a, \mathrm{Log}\,۳ = b$

$\mathrm{Log}\sqrt{۰/۷۵} = \mathrm{Log}\left(\frac{۷۵}{۱۰۰}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}\,\mathrm{Log}\frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۲}(\mathrm{Log}\,۳ - \mathrm{Log}\,۲^{۲}) = \frac{۱}{۲}(\mathrm{Log}\,۳ - ۲\,\mathrm{Log}\,۲)$

$= \frac{۱}{۲}(b - ۲a)$

۵۳

$E = ۲\times۱۰^{۱۹} \xrightarrow{\mathrm{Log}\,۲ = ۰/۳ \Rightarrow ۲ = ۱۰^{۰/۳}} E = ۱۰^{۰/۳} \times ۱۰^{۱۹} \Rightarrow E = ۱۰^{۱۹/۳}$

$\mathrm{Log}\,E = ۱۱/۸ + ۱/۵M \Rightarrow \mathrm{Log}\,۱۰^{۱۹/۳} = ۱۱/۸ + ۱/۵M \Rightarrow ۱۹/۳ = ۱۱/۸ + ۱/۵M$

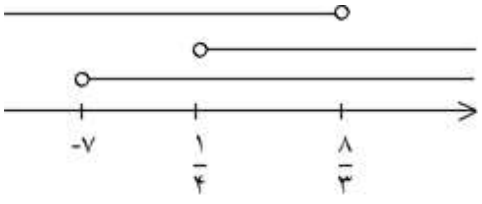
$\Rightarrow ۱/۵M = ۷/۵ \Rightarrow M = ۵$

۵۴

$۴x - ۱ > ۰ \Rightarrow x > \frac{۱}{۴} \quad (۱)$

$x + ۷ > ۰ \Rightarrow x > -۷ \quad (۲)$

$\mathrm{Log}_{\frac{۱}{۲}}^{(۴x-۱)} > \mathrm{Log}_{\frac{۱}{۲}}^{(x+۷)} \Rightarrow ۴x - ۱ < x + ۷ \Rightarrow ۳x < ۸ \Rightarrow x < \frac{۸}{۳} \quad (۳)$



$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)\cap(۳)}$ جواب $= \left(\frac{۱}{۴}, \frac{۸}{۳}\right)$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۵۵

الف) $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{۱۲۰}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۲\pi}{۳}$

ب) $\theta=\frac{L}{r}\Rightarrow\frac{۲\pi}{۳}=\frac{L}{۲۴}$

$\Rightarrow L=\frac{۲\pi\times۲۴}{۳}=۱۶\pi\simeq ۵۰/۲۴\,\text{cm}$

۵۶

$l=r\theta\Rightarrow ۶=r\times۲\Rightarrow r=۳$

$S=\pi r^{۲}=۹\pi$

۵۷ در قرقره بزرگ‌تر داریم:

$$\theta=\frac{\overset{\frown}{PP'}}{r}\Rightarrow\overset{\frown}{PP'}=\frac{\pi}{۳}\times۸=\frac{۸\pi}{۳}\text{cm}$$

چون دو قرقره با یک تسمه به هم متصل شده‌اند پس قرقره کوچک‌تر نیز $\frac{۸\pi}{۳}\text{cm}$ حرکت می‌کند بنابراین:

$$\theta=\frac{L}{r}\Rightarrow\theta=\frac{\frac{۸\pi}{۳}}{۳}=\frac{۸\pi}{۹}\text{rad}$$

۵۸

الف) $\text{Sin}(۳۰۰^\circ)=\text{Sin}\left(۲\pi-\frac{\pi}{۳}\right)=-\text{Sin}\left(\frac{\pi}{۳}\right)=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ب) $\text{Cotg}(۷۵۰^\circ)=\text{Cotg}\left(۴\pi+\frac{\pi}{۶}\right)=\text{Cotg}\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\sqrt{۳}$

پ) $\text{Cos}\left(-\frac{\pi}{۶}\right)=\text{Cos}\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ت) $\text{Cos}\left(-\frac{۲۳\pi}{۴}\right)=\text{Cos}\left(\frac{۲۳\pi}{۴}\right)=\text{Cos}\left(۶\pi-\frac{\pi}{۴}\right)=\text{Cos}\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ث) $\text{Sin}\left(\frac{۵\pi}{۴}\right)=\text{Sin}\left(\pi+\frac{\pi}{۴}\right)=-\text{Sin}\left(\frac{\pi}{۴}\right)=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ج) $\text{tg}(-۸۴۰^\circ)=-\text{tg}(۸۴۰^\circ)=-\text{tg}\left(۵\pi-\frac{\pi}{۳}\right)=\text{tg}\left(\frac{\pi}{۳}\right)=\sqrt{۳}$

چ) $\text{tg}(-۱۵۰^\circ)=-\text{tg}(۱۵۰^\circ)=-\text{tg}\left(۲\pi-\frac{\pi}{۶}\right)=\text{tg}\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

ح) $\text{Cos}\left(\frac{۹\pi}{۴}\right)=\text{Cos}\left(۲\pi+\frac{\pi}{۴}\right)=\text{Cos}\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

خ) $\text{tg}\left(\frac{۱۰\pi}{۳}\right)=\text{Cos}\left(۳\pi+\frac{\pi}{۳}\right)=-\text{Cos}\left(\frac{\pi}{۳}\right)=-\frac{۱}{۲}$

۵۹

$$\frac{\text{Sin}(۱۸۰^\circ-۲۰^\circ)-۲\text{Cos}(۱۸۰^\circ+۲۰^\circ)}{\text{Cos}(۲۷۰^\circ-۲۰^\circ)+\text{Sin}(۲۷۰^\circ+۲۰^\circ)}=\frac{\text{Sin}۲۰^\circ+۲\text{Cos}۲۰^\circ}{-\text{Sin}۲۰^\circ+\text{Cos}۲۰^\circ}\xrightarrow[\text{Cos}۲۰^\circ\ \div]{\text{صورت و مخرج}}$$

(۰/۲۵) (۰/۷۵)

$$\frac{\text{tg}۲۰^\circ+۲}{-\text{tg}۲۰^\circ+۱}=\frac{۲/۴}{۰/۶}=۴\quad(۰/۲۵)$$

(۰/۲۵)

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۶۰ خیر، زیرا :

$$\text{Sin}\,(۱۲۰^\circ - ۹۰^\circ) = \text{Sin}\,۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad \text{Sin}\,۱۲۰^\circ - \text{Sin}\,۹۰^\circ = \frac{۱}{۲} - ۱ = -\frac{۱}{۲}$$

۶۱

$$\text{سمت راست} = \left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\times(۰) + \left(\sqrt{\frac{۲}{۲}}\right)(-۱) = ۰ - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

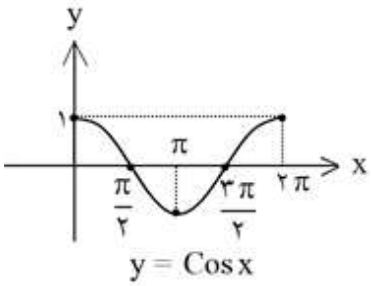
$$\text{سمت چپ} = \text{Sin}\,(-۱۳۵) = -\,\text{Sin}\,۱۳۵ = -\,\text{Sin}\,(۹۰ + ۴۵) = -\,\text{Cos}\,۴۵ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۶۲

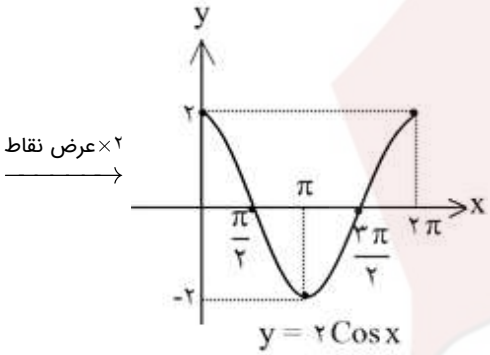
$$f(x) = ۳\,\text{Sin}\left(\frac{۵\pi}{۲} + x\right) + ۱ \Rightarrow f(x) = ۳\,\text{Cos}\,(x) + ۱ \Rightarrow f\left(\frac{۷\pi}{۶}\right) = ۳\,\text{Cos}\left(\frac{۷\pi}{۶}\right) + ۱$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{۷\pi}{۶}\right) = ۳\,\text{Cos}\left(\pi + \frac{\pi}{۶}\right) + ۱ = -۳\,\text{Cos}\left(\frac{\pi}{۶}\right) + ۱ = -۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} + ۱ = -\frac{۳\sqrt{۳}}{۲} + ۱$$

۶۳



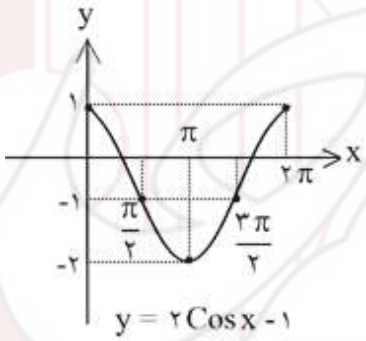
$y = \text{Cos}\,x$



$y = ۲\,\text{Cos}\,x$

عرض نقاط ×۲ ⟶

واحد به پایین ۱ ⟶



$y = ۲\,\text{Cos}\,x - ۱$

۶۴ الف) از آن‌جا که ماکزیمم تابع برای $x = \frac{\pi}{۲}$ و مینیمم تابع برای $x = -\frac{\pi}{۲}$ است، بنابراین برای مختصات دو نقطه داریم:

$$A\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{۲}\\ ۳\end{matrix}\right. \Rightarrow a + b\,\text{Sin}\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۳ \Rightarrow a + b = ۳ \;(۱)$$

$$B\left|\begin{matrix}-\frac{\pi}{۲}\\ -۱\end{matrix}\right. \Rightarrow a + b\,\text{Sin}\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = -۱ \Rightarrow a - b = -۱ \;(۲)$$

$$\begin{cases} a + b = ۳ \\ a - b = -۱ \end{cases} \Rightarrow ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = ۲ \Rightarrow y = ۱ + ۲\,\text{Sin}\,x$$

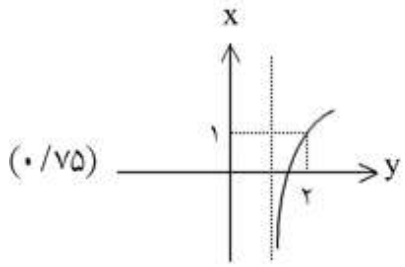
ب)

$$y = ۱ + ۲\,\text{Sin}\,x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۴}} y = ۱ + ۲\,\text{Sin}\left(\frac{\pi}{۴}\right) \Rightarrow y = ۱ + \cancel{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{\cancel{۲}}$$

$$\Rightarrow y = ۱ + \sqrt{۲}$$

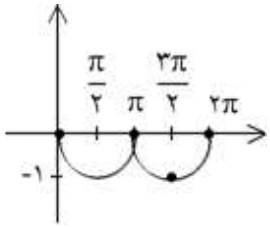
٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۶۵ الف)



(۰/۷۵)

ب)



(۰/۵)

۶۶ $۲\ \mathrm{Sin}\ ۲x\ \mathrm{Cos}\ ۲x = \mathrm{Sin}\ ۴x = \mathrm{Sin}\ ۴(۷/۵^\circ) = \frac{۱}{۲}$

۶۷ الف) $\mathrm{Sin}\ ۲\alpha = ۲\ \mathrm{Sin}\ \alpha\ \mathrm{Cos}\ \alpha \Rightarrow \mathrm{Sin}\ ۲\alpha = \mathrm{Sin}\ (\alpha+\alpha) = \mathrm{Sin}\ \alpha\ \mathrm{Cos}\ \alpha + \mathrm{Cos}\ \alpha\ \mathrm{Sin}\ \alpha$
$= ۲\ \mathrm{Sin}\ \alpha\ \mathrm{Cos}\ \alpha$

ب) $\mathrm{Cos}\ ۲\alpha = \mathrm{Cos}^{۲}\alpha - \mathrm{Sin}^{۲}\alpha = \mathrm{Cos}\ (\alpha+\alpha) = \mathrm{Cos}\ \alpha\ \mathrm{Cos}\ \alpha - \mathrm{Sin}\ \alpha\ \mathrm{Sin}\ \alpha$
$\mathrm{Cos}^{۲}\alpha - \mathrm{Sin}^{۲}\alpha$

پ) $\mathrm{Cos}\ ۲\alpha = ۲\ \mathrm{Cos}^{۲}\alpha - ۱ \Rightarrow \mathrm{Cos}\ ۲\alpha = \mathrm{Cos}\ (\alpha+\alpha) = \mathrm{Cos}\ \alpha.\ \mathrm{Cos}\ \alpha - \mathrm{Sin}\ \alpha.\ \mathrm{Sin}\ \alpha$
$\Rightarrow \mathrm{Cos}\ ۲\alpha = \mathrm{Cos}^{۲}\alpha - \mathrm{Sin}^{۲}\alpha \xrightarrow{\mathrm{Sin}^{۲}\alpha = ۱ - \mathrm{Cos}^{۲}\alpha} \mathrm{Cos}\ ۲\alpha = \mathrm{Cos}^{۲}\alpha - (۱ - \mathrm{Cos}^{۲}\alpha)$
$\Rightarrow \mathrm{Cos}\ ۲\alpha = ۲\ \mathrm{Cos}^{۲}\alpha - ۱$

ت) $\mathrm{Cos}\ ۲\alpha = ۱ - ۲\ \mathrm{Sin}^{۲}\alpha \Rightarrow \mathrm{Cos}\ ۲\alpha = \mathrm{Cos}\ (\alpha+\alpha) = \mathrm{Cos}^{۲}\alpha - \mathrm{Sin}^{۲}\alpha$
$\xrightarrow{\mathrm{Cos}^{۲}\alpha = ۱ - \mathrm{Sin}^{۲}\alpha} \mathrm{Cos}\ ۲\alpha = ۱ - \mathrm{Sin}^{۲}\alpha - \mathrm{Sin}^{۲}\alpha \Rightarrow \mathrm{Cos}\ ۲\alpha = ۱ - ۲\ \mathrm{Sin}^{۲}\alpha$

۶۸ α حاده, $\mathrm{Cos}\ \alpha = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \mathrm{Sin}^{۲}\alpha = ۱ - \mathrm{Cos}^{۲}\alpha = ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \mathrm{Sin}\ \alpha = \pm\frac{۳}{۵} \Rightarrow \mathrm{Sin}\ \alpha = \frac{۳}{۵}$

β منفرجه, $\mathrm{Cos}\ \beta = \frac{-۱۲}{۱۳} \Rightarrow \mathrm{Sin}^{۲}\beta = ۱ - \mathrm{Cos}^{۲}\beta = ۱ - \frac{۱۴۴}{۱۶۹} = \frac{۲۵}{۱۶۹} \Rightarrow \mathrm{Sin}\ \beta = \pm\frac{۵}{۱۳}$

$\Rightarrow \mathrm{Sin}\ \beta = \frac{۵}{۱۳}$

$$\mathrm{Sin}\ (\alpha+\beta) = \mathrm{Sin}\ \alpha.\ \mathrm{Cos}\ \beta + \mathrm{Sin}\ \beta\ \mathrm{Cos}\ \alpha = \frac{۳}{۵}\times\left(\frac{-۱۲}{۱۳}\right) + \frac{۵}{۱۳}\times\frac{۴}{۵} = \frac{-۳۶}{۶۵} + \frac{۲۰}{۶۵} = \frac{-۱۶}{۶۵}$$

$$\mathrm{Cos}\ (\alpha-\beta) = \mathrm{Cos}\ \alpha.\ \mathrm{Cos}\ \beta + \mathrm{Sin}\ \alpha\ \mathrm{Sin}\ \beta = \frac{۴}{۵}\times\left(\frac{-۱۲}{۱۳}\right) + \frac{۳}{۵}\times\frac{۵}{۱۳} = \frac{-۴۸}{۶۵} + \frac{۱۵}{۶۵} = \frac{-۳۳}{۶۵}$$

۶۹ $\mathrm{Cos}\ ۲x = \mathrm{Cos}^{۲}x - \mathrm{Sin}^{۲}x \xrightarrow{\mathrm{Sin}^{۲}x = ۱ - \mathrm{Cos}^{۲}x} \mathrm{Cos}\ ۲x = \mathrm{Cos}^{۲}x - (۱ - \mathrm{Cos}^{۲}x)$
$\Rightarrow \mathrm{Cos}\ ۲x = \mathrm{Cos}^{۲}x - ۱ + \mathrm{Cos}^{۲}x \Rightarrow \mathrm{Cos}\ ۲x = ۲\ \mathrm{Cos}^{۲}x - ۱ \xrightarrow{\mathrm{Cos}\ x = t}$
$\mathrm{Cos}\ ۲x = ۲t^{۲} - ۱$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۷۰ $1+\tan^2\alpha \overset{(0/25)}{=} \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$ (۰/۲۵)

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$ (۰/۲۵)

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \overset{(0/25)}{=} 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$ (۰/۲۵)

۷۱ $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right) \overset{(0/25)}{=} \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) \overset{(0/25)}{}$

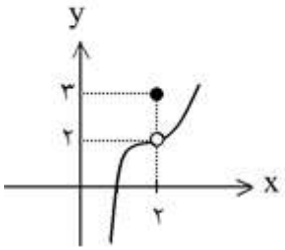
$= \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x) \overset{(0/25)}{=} \sin x+\cos x \overset{(0/25)}{}$

۷۲ $\sin 3\theta = \sin(2\theta+\theta) = \sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta.\sin\theta$

$= 2\sin\theta\cos\theta.\cos\theta+(\cos^2\theta-\sin^2\theta).\sin\theta$

$= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+(1-\sin^2\theta-\sin^2\theta).\sin\theta$

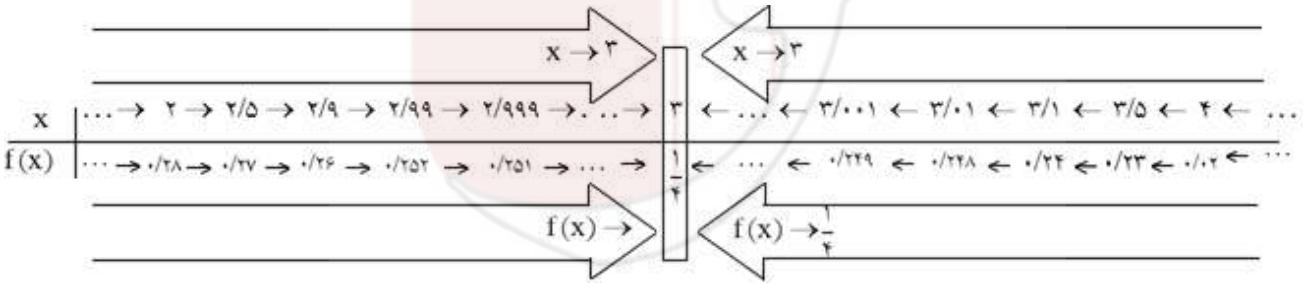
$= 3\sin\theta-4\sin^3\theta$

۷۳ 

(۰/۵)

۷۴ $\lim_{x\to -1} f(x) = -4$, $\lim_{x\to -4} f(x) = -1$ $\Rightarrow \begin{cases} -a+1=-4 \\ -32+b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=31 \end{cases}$

۷۵ $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

۷۶ 

۷۷ $3-1=2$ (۰/۵)

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۷۸ برای آن‌که در $x = ۲$ دارای حد باشد باید حد راست و چپ در $x = ۲$ برابر باشد.

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} x^۳ + ۲ = ۸ + ۲ = ۱۰$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} \frac{ax}{x - ۳} = \frac{۲a}{-۱} = -۲a$$

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} f(x) \Rightarrow ۱۰ = -۲a \Rightarrow a = -۵$$

۷۹

$$f(x) = \begin{cases} x + ۲ & x > -۲ \\ x^۲ + ۲x & x \le -۲ \end{cases}$$

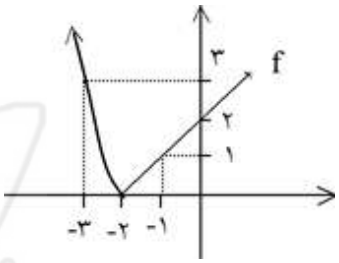
x	-۲	-۱
y	۰	۱

x	-۲	-۳
y	۰	۳

$$\lim_{x \to -۲^+} f(x) = ۰$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۰ \Rightarrow \lim_{x \to -۲} f(x) = ۰$$

تابع در $x = -۲$ دارای حدی برابر صفر است. زیرا حد راست و چپ برابر صفر است.



۸۰

الف) $$\lim_{x \to ۳} \frac{x + ۳}{\sqrt{۵x + ۱}} = \frac{۶}{\sqrt{۱۶}} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

ب) $$\lim_{x \to ۳^-} (۱ - [x]) = ۱ - ۲ = -۱$$

ج) $$\lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۴}{x^۲ - ۷x + ۱۰} = \lim_{x \to ۲} \frac{\cancel{(x - ۲)}(x + ۲)}{\cancel{(x - ۲)}(x - ۵)} = \lim_{x \to ۲} \frac{x + ۲}{x - ۵} = \frac{۴}{-۳}$$

د) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\cancel{(\cos x - \sin x)}(\cos x + \sin x)}{\cancel{\cos x - \sin x}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

۸۱

$$\lim_{x \to ۳^-} f(x) = ۲ + b \qquad \lim_{x \to ۳^+} f(x) = ۳^۲ + ۲ = ۱۱$$

$$\lim_{x \to ۳^-} f(x) = \lim_{x \to ۳^+} f(x) \Rightarrow ۲ + b = ۱۱ \Rightarrow b = ۹$$

۸۲

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = ۳ \text{ (۰/۵)} \quad \text{و} \quad \lim_{x \to ۱^+} f(x) = ۲ \text{ (۰/۵)} \quad \text{و} \quad f(۱) = ۱ \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow ۳ - ۲ + ۱ = ۲ \text{ (۰/۲۵)}$$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۸۳ $\lim\limits_{x\to ۱^+}\sqrt{۱-x}$ موجود نیست $\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{۱-x}$ وجود ندارد

۸۴ نکته: $x\to ۲^+ \Rightarrow ۲\leqslant x<۳ \Rightarrow [x]=۲$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}[x]-۲x=[۲^+]-۴=-۲$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\frac{۴a+۲}{۲-۳}=-۴a-۲$$

شرط حد داشتن $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$

$$-۴a-۲=-۲ \Rightarrow ۴a=۰ \Rightarrow a=۰$$

۸۵

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x)=\lim_{x\to ۴^-}(x-a)=۴-a$$

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=\lim_{x\to ۴^+}(۵x^۲+bx+۴)=۸۰+۴b+۴$$

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x)=\lim_{x\to ۴^+} f(x) \Rightarrow ۴-a=۴b+۸۴ \Rightarrow a+۴b=-۸۰$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۲-۳a=۲ \Rightarrow a=۰, b=-۲۰$$

۸۶ شرط داشتن حد در نقطه‌ی $x=۱$ آن است که حد چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابر باشند، یعنی:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x) \Rightarrow a+b=a+۴ \to b=۴$$ و a دلخواه است.

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\geqslant ۱ \\ ax^۲+۴ & x<۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(ax+b)=a+b \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(ax^۲+۴)=a+۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+۴=۷ \Rightarrow a=۳ \\ a+b=۷ \Rightarrow b=۴ \end{cases}$$

۸۷ طبق قضایای حد داریم:

$$\lim_{x\to ۴}(f(x)-x+۷)=\lim_{x\to ۴} f(x)+\lim_{x\to ۴}-x+۷=۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۴} f(x)+۳=۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۴} f(x)=-۱$$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۸۸

الف) $\lim\limits_{x\to ۹} (\sqrt{x}-۹)^{۳} = (\sqrt{۹}-۹)^{۳} = -۲۱۶$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} (-۶x^{۷}-۴x^{۲}+۵) = -۶(-۱)^{۷}-۴(-۱)^{۲}+۵ = ۷$

پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{۵}{۳}} \dfrac{(x+\pi)(۳x+۵)}{(۳x+۶)(x^{۳}+۱)} = \dfrac{\left(-\frac{۵}{۳}+\pi\right)\overbrace{\left(۳\left(-\frac{۵}{۳}\right)+۵\right)}^{۰}}{\left(۳\left(-\frac{۵}{۳}\right)+۶\right)\left(\left(-\frac{۵}{۳}\right)^{۳}+۱\right)} = ۰$

ت) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}^{+}} \dfrac{۱-x^{۲}}{x^{۲}-۴} = \dfrac{۱-(\sqrt{۲})^{۲}}{(\sqrt{۲})^{۲}-۴} = \dfrac{۱-۲}{۲-۴} = \dfrac{-۱}{-۲} = \dfrac{۱}{۲}$

ث) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \sqrt{۴x^{۲}+۶x} = \sqrt{۴\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}+۶\left(\frac{۱}{۲}\right)} = ۲$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} \dfrac{\sin x}{x+\cos x} = \dfrac{\sin ۰}{۰+\cos ۰} = \dfrac{۰}{۰+۱} = ۰$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \dfrac{|\cos x|}{x-\pi} = \dfrac{\left|\cos \frac{\pi}{۲}\right|}{\frac{\pi}{۲}-\pi} = \dfrac{۰}{\frac{\pi}{۲}} = ۰$

۸۹

$\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{۳f(x)-۱}{۲f(x)+۵} = \dfrac{۳\lim\limits_{x\to ۳} f(x)-\lim\limits_{x\to ۳} ۱}{۲\lim\limits_{x\to ۳} f(x)+\lim\limits_{x\to ۳} ۵} = ۲ \xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=k} \dfrac{۳k-۱}{۲k+۵} = ۲$

$\Rightarrow ۴k+۱۰ = ۳k-۱ \Rightarrow k = -۱۱$

$\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{f(x)-۱}{f(x)+۷} = \dfrac{\lim\limits_{x\to ۳} f(x)-\lim\limits_{x\to ۳} ۱}{\lim\limits_{x\to ۳} f(x)+\lim\limits_{x\to ۳} ۷} = \dfrac{-۱۱-۱}{-۱۱+۷} = \dfrac{-۱۲}{-۴} = ۳$

۹۰

$\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^{+}} ax^{۲}+۳x = ۴a+۶$

$\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^{-}} x^{۳}+۴b = ۸+۴b$ $\Rightarrow ۴a+۶ = ۸+۴b \Rightarrow ۴a-۴b = ۲$

$\xrightarrow{\div ۴} a-b = \dfrac{۱}{۲}$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\sin x}{\cos x}\times\frac{۱+\sin x}{۱+\sin x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\sin^{۲}x}{\cos x(۱+\sin x)}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos^{۲}x}{\cos x\,(۱+\sin x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos x}{۱+\sin x} = ۰$

ب) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)}{\cos x - \sin x} \overset{\div}{=} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to۰^-} \frac{x^{۲}}{|۱-\cos x|} = \lim\limits_{x\to۰^-} \frac{x^{۲}}{۱-\cos x} = \lim\limits_{x\to۰^-} \frac{x^{۲}}{۱-\cos x}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}$

$= \lim\limits_{x\to۰^-} \frac{x^{۲}}{۱-\cos^{۲}x}\times(۱+\cos x) = \lim\limits_{x\to۰^-} \frac{x^{۲}}{\sin^{۲}x}\times(۱+\cos x) = ۱\times(۱+۱) = ۲$

ت) $\lim\limits_{x\to۰} \frac{۲-۲\cos ۲x}{x\sin x} \overset{\div}{=} \lim\limits_{x\to۰} \frac{۲(۱-\cos ۲x)}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to۰} \frac{۲\left(۱-۲\cos^{۲}x+۱\right)}{x\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to۰} \frac{۴(۱-\cos^{۲}x)}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to۰} \frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{\sin x}\times۴ = ۱\times۱\times۴ = ۴$

ث) $\lim\limits_{x\to-\pi} \frac{\cos x+۱}{x+\pi} \xrightarrow[x+\pi=t]{\div} \lim\limits_{t\to۰} \frac{\cos(t-\pi)+۱}{t} = \lim\limits_{t\to۰} \frac{\cos t\cos\pi+\sin t\sin\pi+۱}{t}$

$= \lim\limits_{t\to۰} \frac{\overbrace{\cos t\cos\pi}^{-\cos t}+\overbrace{\sin t\sin\pi}^{۰}+۱}{t} = \lim\limits_{t\to۰} \frac{۱-\cos t}{t} = \lim\limits_{t\to۰} \frac{۱-\cos t}{t}\times\frac{۱+\cos t}{۱+\cos t}$

$= \lim\limits_{t\to۰} \frac{۱-\cos^{۲}t}{t}\times\frac{۱}{۱+\cos t} = \lim\limits_{t\to۰} \frac{\sin t}{t}\times\frac{\sin t}{۱+\cos t} = ۱\times\frac{۰}{۲} = ۰$

ج) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a} \xrightarrow[x-a=t]{\div} \lim\limits_{t\to۰} \frac{\sin(t+a)-\sin a}{t}$

$= \lim\limits_{t\to۰} \frac{\sin t\cos a+\cos t\sin a-\sin a}{t} = \lim\limits_{t\to۰} \frac{\sin t}{t}\times\cos\alpha - \lim\limits_{t\to۰} \frac{۱-\cos t}{t}\times\sin\alpha$

$= \lim\limits_{t\to۰} \frac{\sin t}{t}\times\cos\alpha - \lim\limits_{t\to۰} \frac{۱-\cos t}{t}\times\frac{۱+\cos t}{۱+\cos t}\times\sin\alpha$

$= \lim\limits_{t\to۰} \frac{\sin t}{t}\times\cos\alpha - \lim\limits_{t\to۰\times\sin a} \frac{۱-\cos^{۲}t}{t}\times\frac{۱}{۱+\cos t}$

$= \lim\limits_{t\to۰} \frac{\sin t}{t}\times\cos a - \lim\limits_{t\to۰} \frac{\sin t}{t}\times\frac{\sin t}{۱+\cos t}\times\sin a = ۱\times\cos\alpha - ۱\times\frac{۰}{۱+۱}\times\sin\alpha = \cos a$

چ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)}{۶x-۲\pi} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)}{۶\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)} \xrightarrow[x-\frac{\pi}{۲}=t]{\div} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۱}{۶}\times\frac{\sin t}{t}$

$= \frac{۱}{۶}\times۱ = \frac{۱}{۶}$

ح) $\lim\limits_{x\to۱} \frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱} \overset{\div}{\to} \lim\limits_{x\to۱} \frac{۲x+۱-۳\sqrt{x}}{x-۱}\times\frac{۲x+۱+۳\sqrt{x}}{۲x+۱+۳\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x\to۱} \frac{(۲x+۱)^{۲}-(۳\sqrt{x})^{۲}}{x-۱}\times\frac{۱}{۲x+۱+۳\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x\to۱} \frac{۴x^{۲}+۴x+۱-۹x}{x-۱}\times\frac{۱}{۲x+۱+۳\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to۱} \frac{۴x^{۲}-۵x+۱}{x-۱}\times\frac{۱}{۲x+۱+۳\sqrt{x}}$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(2x-1)}{x-1} \times \frac{1}{2x+1+3\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{x-1} \times \frac{1}{2x+1+3\sqrt{x}} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

۹۲

الف) $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+x-1}{3x^2+3x} \div = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2x-1)}{3x(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{2x-1}{3x} = \frac{-3}{-3} = 1$

ب) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2[x]-8}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-8}{x-2} \div = \lim_{x\to 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 8$

پ) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} \div = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} \times \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} \times \frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$

$= \frac{1}{16}$

ت) $\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} \div = \lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \times \frac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}}$

$= \lim_{x\to 4} \frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{2(4-x)(2+\sqrt{x})} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

ث) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x} \div = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$

ج) $\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{2}{2} = 1$

۹۳

الف) $\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x+3}} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \times \frac{2+\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-x)(2+\sqrt{x+3})}{(4-x-3)(x+\sqrt{x})}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{-(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{1\times 4}{-2} = -2$

ب) $\lim_{x\to 3} \frac{x-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+1}-2} \times \frac{x+\sqrt{2x+3}}{x+\sqrt{2x+3}} \times \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2-2x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)(x+\sqrt{2x+3})}$

$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(x+\sqrt{2x+3})} = \frac{4\times 4}{6} = \frac{8}{3}$

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$ (۰/۲۵)

$\underbrace{x\to 1^-}_{(۰/۲۵)}$ $\underbrace{x\to 1^-}_{(۰/۲۵)}$

۹۴

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} [x] + a = 1 + a$$ (۰/۲۵)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 + a = \frac{1}{2}$$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ (۰/۲۵)

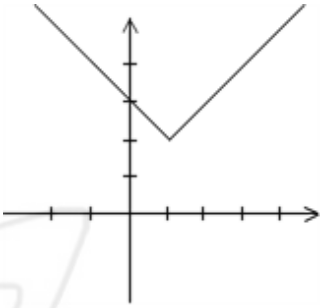
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{x\times x\times x} = 1\times 2\times 3 = 6$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

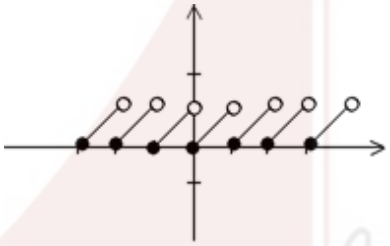
۹۵

۹۶

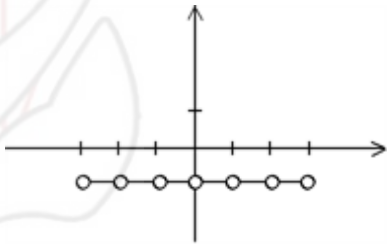
الف)



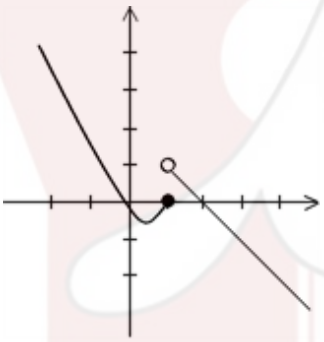
ب)



پ)



ت)



۹۷

$$\lim_{x\to 2^+} (3+ax^2) = 3+4a$$ (۰/۲۵)

$$\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{b}{x-1}-1\right) = b-1$$ (۰/۲۵)

$f(2) = 7$

$\Rightarrow 3+4a=b-1=7$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ $\begin{cases} a=1 & (۰/۲۵) \\ b=8 & (۰/۲۵) \end{cases}$

۹۸

$$\lim_{x\to 3^+} (2[x]+3a) = 6+3a$$ (۰/۲۵) , $\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)}+b\right) = -\frac{1}{6}+b$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵)

$f(3) = 1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 6+3a=1 \Rightarrow a=-\frac{5}{3}$ (۰/۲۵) , $-\frac{1}{6}+b=1 \Rightarrow b=\frac{7}{6}$ (۰/۲۵)

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰

۹۹

$$\lim_{x\to ۲^+} y = \lim_{x\to ۲^+} \frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲} = ۲+۲ = ۴ \qquad \lim_{x\to ۲^-} y = \lim_{x\to ۲^-} \frac{۳(۲)+۱+۱}{۲} = ۴$$

$$f(۲) = ۲+۲ = ۴$$

چون $\lim_{x\to ۲^+} y = \lim_{x\to ۲^-} y = f(۲)$ تابع در $x = ۲$ پیوسته است.

۱۰۰ $D_f = (-۹, +\infty)$ (۰/۲۵) نقاط ناپیوستگی برابر است با $(-\infty, -۹]$ (۰/۲۵)

$x+۹\neq ۰ \Rightarrow x\neq -۹$ (۰/۲۵)

٪حروف‌چینی ریاضی: ۱۰۰