**جمهوری اسلامی ایران**
**وزارت آموزش و پرورش**
**اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران**
**دبیرستان غیردولتی پسرانهٔ موحد**
**منطقه ۵ شهر تهران**

| | | |
|---|---|---|
| پایه : **یازدهم**<br>رشته : **تجربی** | **نمونه سوالات**<br>**نام درس :** ریاضی ۲ | نام استاد : آقای **صوابی** |

۱) مساحت مثلث ABC را حساب کنید.

$$A\left|\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right. , B\left|\begin{matrix}7\\-2\end{matrix}\right. , C\left|\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\right.$$

۲) معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را حساب کنید.

$$A\left|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right.$$

۳) در مثلث ABC محیط مثلث را حساب کنید.

$$A\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right. \qquad C\left|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}\right.$$

۴) در مثلث ABC طول ارتفاع AH را حساب کنید.

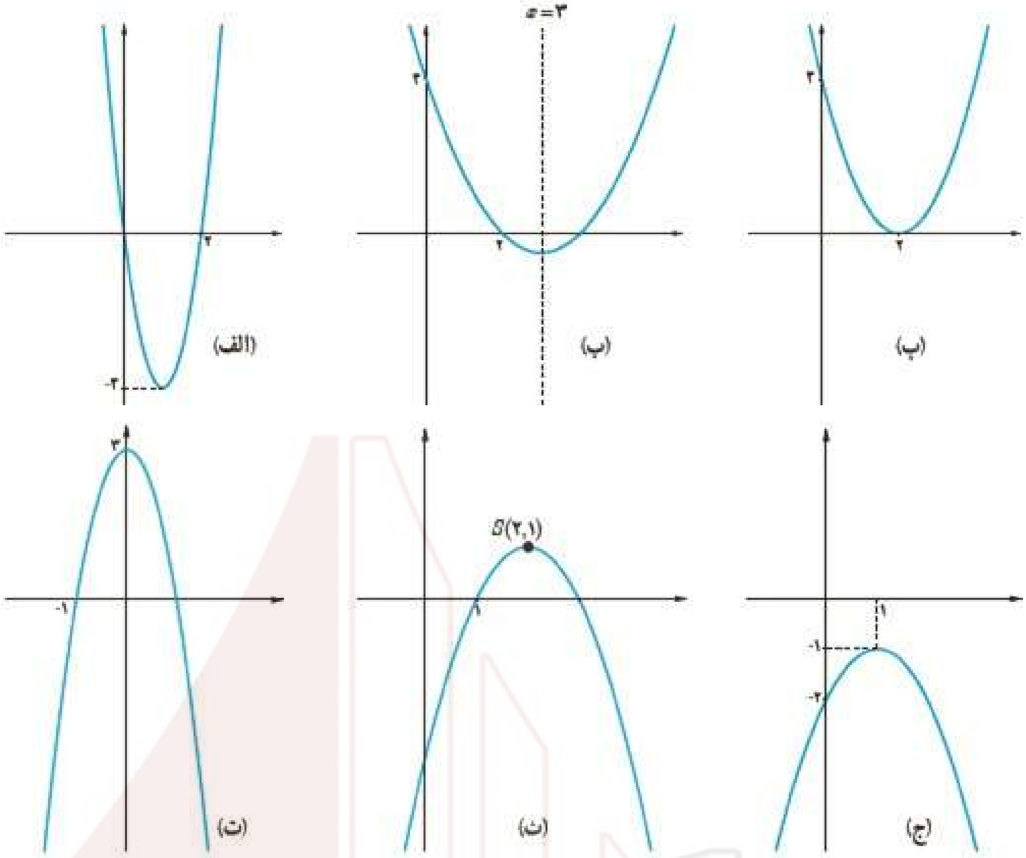
$$A\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}\right. \qquad C\left|\begin{matrix}7\\0\end{matrix}\right.$$

۵) مساحت مستطیلی را حساب کنید که دو ضلع آن روی خطوط $2x - y + 1 = 0$ و $2y + x + 3 = 0$ باشد و یک رأس آن $A(1, 5)$ باشد.

۶) مقدار m را چنان بیابید که جمع ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - (m+5)x - 10 = 0$ برابر ۳ باشد.

۷) اگر $x = 5$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^2 - kx + k + 3$ باشد:
الف) مقدار k را حساب کنید.
ب) صفر دیگر تابع را به دست آورید.

۸) ضابطه‌ی جبری سهمی‌های زیر را بنویسید.




۹) معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ باشند، برابر ....... است.

۱۰) محیط یک زمین مستطیل شکل ۲۸ متر و مساحت آن ۴۶ متر مربع است. اندازه طول و عرض مستطیل را تعیین کنید.

۱۱) صفرهای تابع f با ضابطه ی $f(x)=(x^۲+۴x)^۲-۲(x^۲+۴x)-۱۵$ را به دست آورید.

۱۲) نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(۱,۶)$ و $(-۳,۲۲)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض یک قطع می‌کند. ضابطه‌ی این تابع را بنویسید.

۱۳) یک موشک با سرعت اولیه ۲۱۶ متر بر ثانیه از زمین به فضا پرتاب می‌شود. ارتفاع این موشک (h) در زمان t، از رابطه‌ی $h(t)=-۱۸t^۲+۲۱۶t$ به دست می‌آید. ارتفاع ماکزیمم آن و هم‌چنین زمانی را که موشک به زمین برخورد می‌کند به دست آورید.

۱۴) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) ریشه معادله $x+\sqrt{x}=۶$ برابر ۴ است.

ب) معادله $\sqrt{x-۲}+\sqrt{x^۲-۵x+۶}=۰$ یک جواب حقیقی دارد.

۱۵) یک قایق با سرعت ۱۰ متر بر دقیقه در آب راکد حرکت می‌کند. اگر فاصله ۹۶ متری یک رودخانه را رفته و برگشت کند و اختلاف زمان رفت و برگشت ۴ دقیقه باشد، سرعت آب رودخانه را حساب کنید.

**۱۶** هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x-۲} = ۵$

ب) $\frac{۱۰}{r} - \frac{۱۵}{۲} = \frac{۲۰}{۳r} - ۵$

پ) $\frac{۲x}{x-۳} + \frac{x+۱}{x+۴} = \frac{x-۱}{x-۳}$

ت) $\sqrt{t+۴} = ۳$

ث) $k = \sqrt{۶k-۸}$

ج) $x + \sqrt{x} = ۶$

چ) $\sqrt{x+۱} - \sqrt{۲x-۵} = ۱$

ح) $\sqrt{m} + \frac{۱}{\sqrt{m}} = ۲$

**۱۷** فرض کنید نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

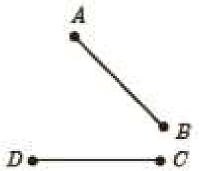
الف) مثلثی متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعده‌ی آن بر خط d منطبق باشد.

ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $۸\mathrm{cm}^۲$ باشد.


**۱۸** الف) دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه‌ی D و C نیز به یک فاصله باشد.

ب) نقطه‌ی موردنظر در قسمت (الف) را O می‌نامیم. اگر نقطه‌ی O روی عمودمنصفِ پاره‌خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی ABCD نسبت به دایره‌ی G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

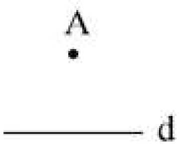



**۱۹** فرض کنید نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

الف) مثلث متساوی‌الساقینی که A یک رأس آن و قاعده‌ی آن بر خط d منطبق باشد.

ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

پ) مثلثی که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $۸\mathrm{cm}^۲$ باشد.




**۲۰** اگر پاره‌خط $\mathrm{PQ} = ۷$ باشد، آن‌گاه با رسم شکل مناسب به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مکان هندسی نقاطی را مشخص کنید که از پاره‌خط PQ به فاصله ۲ واحد باشد.

ب) چند نقطه وجود دارد که از P به فاصله ۴ و از Q به فاصله ۵ واحد باشد؟

**۲۱** ثابت کنید هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

۲۲ هریک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.
الف) هیچ عدد اولِ بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.
ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیش‌تر است.
پ) در هر مثلث اندازه‌ی هر ضلع از اندازه‌ی هر ارتفاع بزرگ‌تر است.
ت) در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر بر هر ضلع بر هم منطبق‌اند.

۲۳ در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آن‌چه را داده شده است، بنویسید.
الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آن‌گاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.
ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، در این صورت زوایای مقابل با هم برابرند.
پ) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.
ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر» کوچک‌تر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر»
(راهنمایی: شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید.)

۲۴ اگر $\frac{c}{۱۳}=\frac{b}{۷}=\frac{a}{۵}$، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{۷a-۴b}{۲c}$ را به دست آورید.

۲۵ ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خطی که وسط های دو ضلع را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

۲۶ در شکل‌های زیر، PQ با BC موازی است، مقادیر x و y را محاسبه کنید.

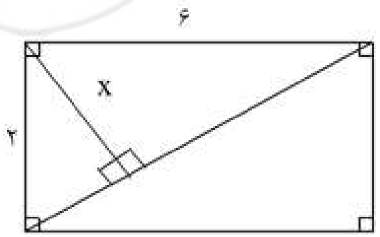

۲۷ عکس تالس را با برهان خلف اثبات کنید.

۲۸ اگر داشته باشیم $\frac{x}{۳}=\frac{y}{۴}=\frac{z}{۵}=\frac{۲}{۷}$ آن‌گاه $x+y+z$ چند است؟

۲۹ اگر a و b و c سه عدد گنگ باشند، آیا $abc^۲$ یک عدد گنگ است؟ چرا؟

۳۰ ثابت کنید $\sqrt{۵}$ گنگ است. (برهان خلف)

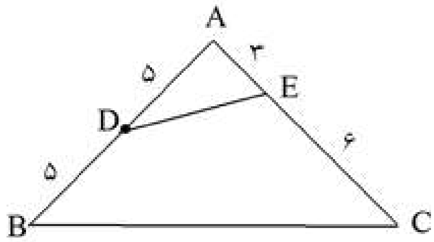
۳۱ مقدار x را حساب کنید.






%حروف‌چینی ریاضی: ۸۰

**۳۲** در شکل زیر مطلوب است محاسبه $\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}$:



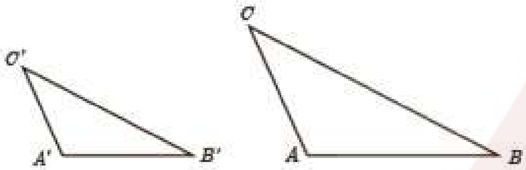

**۳۳** دو مثلث متشابه ABC و A'B'C' را با نسبت تشابه K درنظر بگیرید؛ به گونه‌ای که $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$ باشد. حال ارتفاع‌های AH و A'H' را در دو مثلث رسم کنید.

الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و A'H'B' متشابه‌اند.

ب) نسبت $\frac{AH}{A'H}$ را به دست آورید.

پ) نسبت مساحت‌های $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$ را محاسبه کنید.

ت) نسبت محیط های دو مثلث ABC و A'B'C' را به دست آورید.



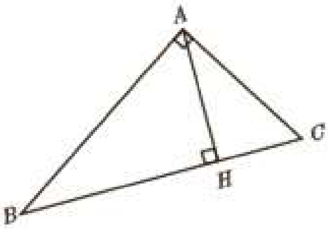

**۳۴** در مثلث قائم‌الزاویه‌ی روبه‌رو در هر حالت، اندازه پاره‌خط خواسته شده را به دست آورید.

الف) $AC=?, AB=?, AH=?, BH=۹, BC=۱۰$

ب) $AB=?, AH=?, BC=?, CH=۲, AC=۵$

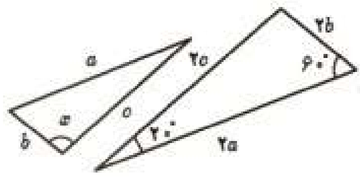
پ) $AH=?, BC=?, AC=۶, AB=۸$

ت) $AC=?, BC=?, BH=?, AH=۶, AB=۱۲$

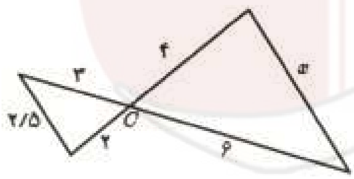



**۳۵** در هر قسمت تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را مشخص نمایید.

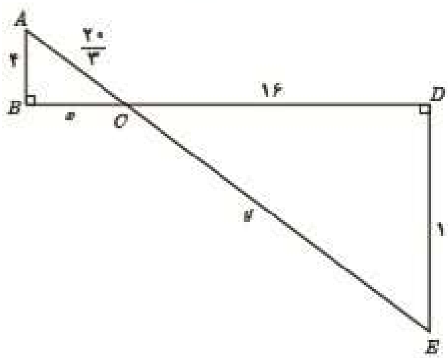
الف)




ب)




پ)



**۳۶** تابعی گویا بنویسید که دامنه‌اش برابر $R-\{2,5\}$ باشد.

**۳۷** دامنه توابع زیر را حساب کنید.

۱) $f(x)=\dfrac{x+4}{x-5}$

۲) $g(x)=\sqrt{4-x}$

**۳۸** اگر دامنهٔ $f(x)=\dfrac{x^2+4}{2x^2+ax+b-1}$ برابر $R-\{-1,3\}$ باشد، $b$ و a را حساب کنید.

**۳۹** دامنه توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x^3-25x}$

ب) $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{4x-1}{x^2-3x}$

**۴۰** در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}\ ,\ g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

ب) $f(x)=x-2\ ,\ g(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$

**۴۱** مجموعه جواب معادله‌ی $[1-2x]=3$ را بیابید.( [] نماد جزء صحیح است.)

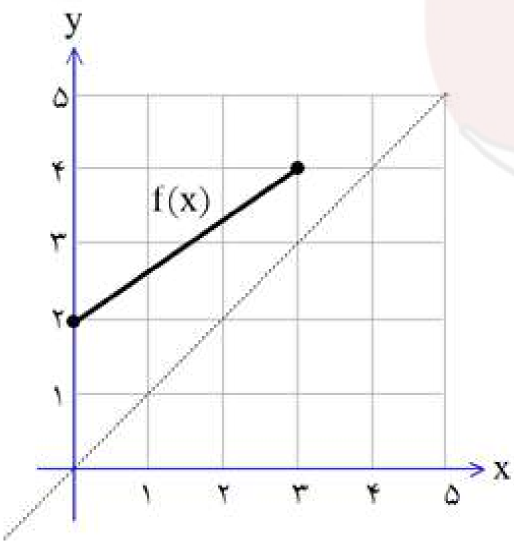
**۴۲** اگر $f(x)=\dfrac{x+1}{4x-1}$ باشد دامنه‌ی $f(1-3x)$ را حساب کنید.

**۴۳** جاهای خالی را پر کنید.

الف) $f=\{(1,4),(5,9),(a+1,9),(1,2b)\}$ یک تابع یک به یک باشد، باید a برابر .......... و b برابر ............ باشد.

ب) در تابع خطی $f(x)=2x-1$ مقدار $f^{-1}(11)$ برابر ........... است.

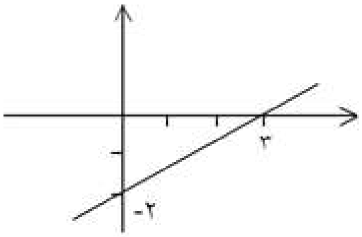
**۴۴** نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.






٪حروف‌چینی ریاضی: ۸۰

۴۵ اگر نمودار تابع خطی f به صورت زیر باشد، حاصل $\frac{۱+f^{-۱}(۱)}{۱-f(-۱)}$ را حساب کنید.




۴۶ ضابطه و دامنه‌ی وارون $f(x)=\frac{x^{۲}-۱۳x+۳۶}{x-۹}$ را به دست آورید.

۴۷ با استفاده از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$، هریک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $r(x)=۲\sqrt{x}$ ب) $s(x)=-\sqrt{x-۲}$

پ) $t(x)=-۳\sqrt{x}$ ت) $u(x)=۱-\sqrt{x}$

ث) $v(x)=۱-\sqrt{x-۳}$

۴۸ در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل‌جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

الف) $g(x)=x$ $f(x)=|x|$ ب) $g(x)=x+۲$ $f(x)=x^{۲}-۴$

پ) $g(x)=-\sqrt{x}$ $f(x)=\sqrt{x}$ ت) $g(x)=x^{۲}+۳x-۱۰$ $f(x)=\frac{x-۲}{x+۵}$

ث) $g=\{(-۱,۲),(۰,۳),(۲,۴),(۳,۰)\}$ $f=\{(۲,۵),(۳,۴),(۰,-۲)\}$

۴۹ اگر $g(x)=\frac{۳}{x-۲}$ و $f(x)=\sqrt{x+۳}$ دو تابع باشند:

الف) مقدار $(f-g)(۱)^{۳}$ را به دست آورید.

ب) دامنه تابع $(f\times g)(x)$ را به دست آورید.

۵۰ اگر $f=\left\{(-۴,۱۳),(-۱,۷),(۰,۵),\left(\frac{۵}{۲},۰\right),(۳,-۵)\right\}$ و $g=\{(-۴,-۷),(-۲,۵),(۰,-۳),(۳,۰),(۵,۲),(۹,۶)\}$ باشد، توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

۵۱ درستی یا نادرستی هریک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱ رادیان باشد، آن‌گاه اندازه قاعده‌ی این مثلث کوچک‌تر از اندازه‌ی هریک از ساق‌های آن است.

ب) در دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویه $\pi$ رادیان تقریباً برابر با ۳/۱۴ سانتی‌متر است.

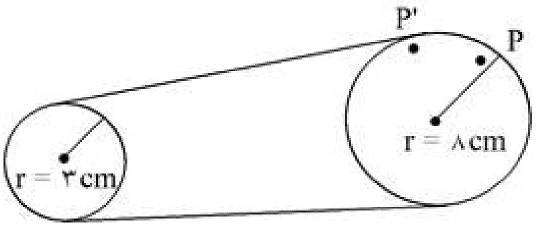
پ) انتهای کمان زاویه $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد.

ت) زاویه‌های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان، $\frac{\pi}{۹}$ رادیان، $\frac{۷\pi}{۳۶}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

**۵۲** طول برف‌پاک‌کن عقب اتومبیلی ۳۰ سانتی‌متر است. فرض کنید برف‌پاک‌کن، کمانی به اندازه‌ی $۱۵۰^\circ$ طی می‌کند.
$(\pi \simeq ۳/۱۴)$

الف) اندازه‌ی کمان را برحسب رادیان به دست آورید.
ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف‌پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

**۵۳** در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های $۸\ \mathrm{cm}$ و $۳\ \mathrm{cm}$ را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقره بزرگ‌تر $\frac{\pi}{۳}$ رادیان می چرخد (یعنی نقطه P در موقعیت 'P قرار می‌گیرد) قرقره کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟




**۵۴** طول کمان دایره‌ای به زاویه‌ی مرکزی $\frac{\pi}{۳}$ رادیان، برابر با $\frac{۴\pi}{۳}$ واحد طول است. قطر دایره را بیابید.

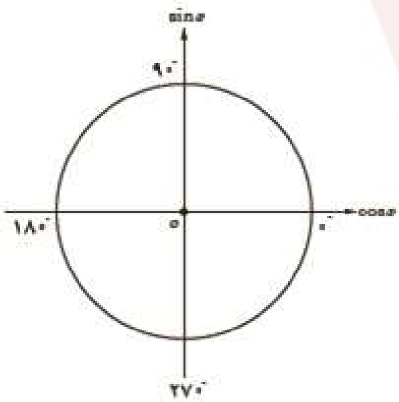
**۵۵** بدون استفاده از ماشین‌حساب درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\mathrm{Sin}\ ۸۴۰^\circ = \mathrm{Sin}\ ۶۰^\circ$

ب) $\mathrm{Cos}\ (-۳۲۴^\circ) = \mathrm{Cos}\ ۳۶^\circ$

پ) $\mathrm{tg}\ (-۱۰۰۰^\circ) = \mathrm{tg}\ ۸۰^\circ$

ت) $\mathrm{Sin}\ ۸۷۵^\circ = \mathrm{Sin}\ ۱۵۵^\circ$




**۵۶** حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\mathrm{tg}\ ۱۳۵^\circ + \mathrm{Cotg}\ ۱۲۰^\circ =$

ب) $\mathrm{Cos}\ (-۲۱۰^\circ) + \mathrm{Cotg}\ (۲۴۰^\circ) =$

پ) $\mathrm{Sin}\ ۶۳۰^\circ + \mathrm{tg}\ (-۵۴۰^\circ) =$

ت) $\mathrm{Cos}\ (-۷۲۰^\circ) + \mathrm{Cotg}\ (-۶۰۰^\circ) + \mathrm{tg}\ ۷۲۰^\circ - \mathrm{tg}\ (-۶۰۰^\circ) =$

ث) $\mathrm{Sin}\left(\frac{۲۵\pi}{۳}\right) - \mathrm{Cos}\left(\frac{۲۳\pi}{۳}\right) =$

ج) $\dfrac{\mathrm{Sin}\ \frac{۳\pi}{۴} - \mathrm{Cos}\ \frac{۵\pi}{۶}}{\mathrm{Sin}\left(\frac{-۳\pi}{۴}\right) + \mathrm{tg}\left(\frac{-۴\pi}{۳}\right)} =$

**۵۷** اگر $\text{tg}\ ۲۰^\circ = ۰/۴$ باشد، حاصل $\dfrac{\text{Sin}\,(۱۶۰^\circ) - ۲\ \text{Cos}\,(-۲۰۰^\circ)}{\text{Cos}\,(۲۵۰^\circ) - \text{Sin}\,(۲۹۰^\circ)}$ را به دست آورید.

**۵۸** حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\text{Sin}\left(\frac{۷\pi}{۳}\right)\text{Cos}\left(\frac{۵\pi}{۴}\right) - \tan\left(\frac{-\pi}{۳}\right)\text{Cos}\left(\frac{۷\pi}{۶}\right)$$

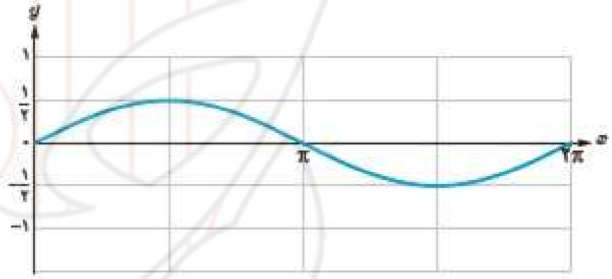
**۵۹** مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $\text{Sin}\left(\frac{۹۹\pi}{۴}\right)$ ب) $\text{tg}\left(-\frac{۱۳\pi}{۶}\right)$ پ) $\text{Cos}\left(\frac{۲۳\pi}{۳}\right)$ ت) $\text{Cotg}\left(-\frac{۱۰\pi}{۳}\right)$

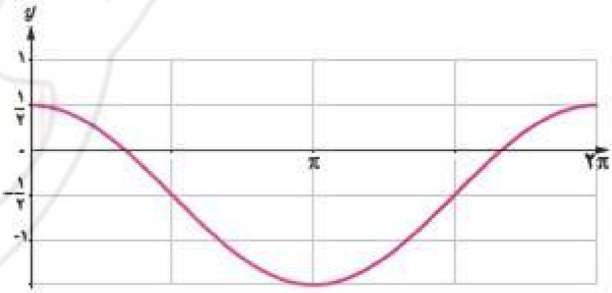
**۶۰** رسم کنید. $y = ۲\ \text{Sin}\left(\frac{x}{۲}\right) + ۱$

**۶۱** با ذکر دلیل مشخص کنید کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند.

الف) شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{۱}{۲}\text{Sin}\,x$ را نشان می‌دهد.




ب) شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \text{Cos}\,x - \frac{۱}{۲}$ را نشان می‌دهد.




پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ۱ + \text{Sin}\,x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه‌ی یک واحد در راستای محور x ها انتقال دهیم.

ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = -\text{Cos}\,x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



%حروف‌چینی ریاضی: ۸۰

۶۲ نمودار هریک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

۱) $[۰,۲\pi]$ , $y=\frac{۱}{۲}\text{Sin}\,x$ ۲) $[-۲\pi,۲\pi]$ , $y=۲\,\text{Cos}\,x+۱$

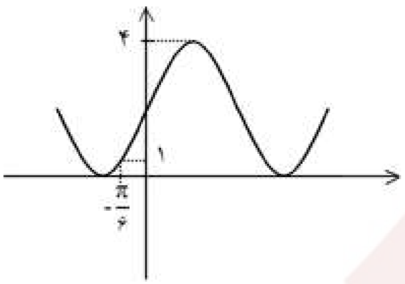
۳) $[-۲\pi,۲\pi]$ , $y=۱-\text{Sin}\,x$ ۴) $[-۴\pi,۴\pi]$ , $y=-۱+\text{Cos}\,x$

۵) $[۰,۲\pi]$ , $y=۱+\text{Sin}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)$ ۶) $[۲\pi,۴\pi]$ , $y=\text{Cos}\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)$

۶۳ در تابع $f(x)=۳\,\text{Sin}\left(\frac{۵\pi}{۲}+x\right)+۱$، مقدار تابع به ازای $x=\frac{۷\pi}{۶}$ را حساب کنید.

۶۴ مقدار b را چنان به‌دست آورید که نقطه‌ی $A\left(\frac{\pi}{۶},۲\text{b}+۳\right)$ بر روی نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=۲\sqrt{۳}\,\text{Cos}\,x+۳$ باشد.

۶۵ اگر نمودار تابع $y=a+b\,\text{Cos}\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)$ به صورت زیر باشد، مقدار تابع به ازای $x=\frac{۱۷\pi}{۳}$ را حساب کنید.




۶۶ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $۲^{۳n-۲}=\frac{۱}{۳۲^{۲}}$ ب) $۹^{۳y-۳}=۲۷^{y+۱}$

پ) $۴^{۳x+۲}=\frac{۱}{۶۴^{۳}}$ ت) $۹^{x}=۳^{x^{۲}-۴x}$

ث) $\frac{۲۵}{۹}=\left(\frac{۳}{۵}\right)^{x+۱}$

۶۷ فرض کنیم $f(x)=۳^{x}$، $g(x)=\left(\frac{۱}{۱۶}\right)^{x}$ و $h(x)=۱۰^{x}$، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $f(۳)$

ب) $g(-۱)$

پ) $h(-۲)$

۶۸ الف) معادله $۶۲۵^{۳x-۱}=\left(\frac{۱}{۲۵}\right)^{۳-x}$ را حل کنید.

ب) نامعادله $۸^{۴p-۲}\leq\frac{۱}{۲۵۶}$ را حل کنید.



٪حروف‌چینی ریاضی: ۸۰

۶۹ هر یک از نامعادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $۲^{۲n-۶} > ۱۶$

ب) $\left(\frac{۱}{۷}\right)^{۵-x} < \left(\frac{۱}{۷}\right)^{۷+x}$

۷۰ از دو معادله‌ی $۵^{۷x-y} \times ۱۲۵^{y-۳x} = ۶۲۵^{۳}$ و $\text{Log}_{۲}(x+y) = ۲ + \text{Log}_{۲}(y-۵x)$ مقدار $y, x$ و را به دست آورید.

۷۱ از دو معادله‌ی $۳^{x+y} \times ۹^{x-y} = ۹$ و $\text{Log}\,(۲x+y) = \text{Log}\,۲y$ مقدار $x, y$ را به دست آورید.

۷۲ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\text{Log}_{۳}\,(p^{۲}-۲) = \text{Log}_{۳}\,p$ ب) $\text{Log}_{۵}\,(x+۱) + \text{Log}_{۵}\,(x-۱) = ۱$

پ) $۳\,\text{Log}_{۴}\,a - \text{Log}_{۴}\,۵ = \text{Log}_{۴}\,۲۵$ ت) $\text{Log}\,(x^{۲}-۲۱) = -۲$

۷۳ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\text{Log}_{۷}\sqrt[۵]{۴۹}$ ب) $\text{Log}_{۳}\,۲۷^{\frac{۱}{۲}}$ پ) $-\text{Log}_{۵}\,۱۲۵$ ت)

$۳\,\text{Log}_{۱۰}\sqrt{۱۰۰۰}$

۷۴ تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\text{Log}_{c}\,\text{abd} = \text{Log}_{c}\,a + \text{Log}_{c}\,b + \text{Log}_{c}\,d$ ($c \neq ۱$ و a و b و c و d اعداد حقیقی مثبت‌اند)

ب) $\text{Log}_{b}\,a = \dfrac{\text{Log}_{c}\,a}{\text{Log}_{c}\,b}$ (b و $c \neq ۱$ و a و b و c اعداد حقیقی مثبت‌اند)

پ) $a^{\text{Log}_{a} b} = b$ ($a \neq ۱$ و a و b اعداد حقیقی مثبت‌اند)

ت) $\text{Log}_{b}\,a \times \text{Log}_{a}\,b = ۱$

۷۵ دامنه تابع زیر را حساب کنید.

$$f(x) = \sqrt{x^{۲}-۴} + \text{Log}_{۵}(x-۲)$$

۷۶ جواب نامعادله $\text{Log}_{\frac{۱}{۲}}(۴x-۱) > \text{Log}_{\frac{۱}{۲}}(x+۷)$ را به دست آورید.

۷۷ جمعیت شهری در سال ۱۴۰۰ شمسی، حدود دو میلیون نفر برآورده شده است. اگر رشد جمعیت این شهر به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۱۰ درصد در حال افزایش باشد، جمعیت این شهر در سال ۱۴۰۱ چند نفر خواهد بود؟

۷۸ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = -۲^{x} + ۱$ ب) $y = -\text{Log}_{۲}(x-۱)$

پ) $y = ۲^{|x|}$ ت) $y = \dfrac{|x|}{x}\,\text{Log}\,x$

**۷۹** نمودار تابع $y = ۲ - \mathrm{Log}_{۰/۵} \frac{۱}{x-۱}$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن‌را حساب کنید.

**۸۰** نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۲ & x > ۰ \\ -۲x - ۲ & x \leq ۰ \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را - در صورت وجود - بیابید.

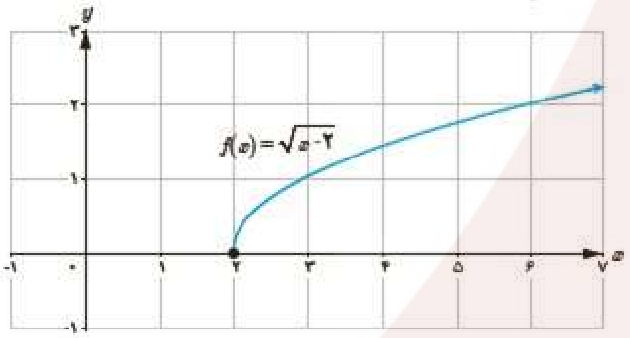
**۸۱** درباره‌ی تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x - ۲}$ مواردزیر را در صورت وجود محاسبه کنید:

الف) $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x \to ۲} f(x)$

ت) $f(۲)$




**۸۲** برای تابع f که نمودار آن داده شده، کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) $\lim\limits_{x \to ۱} f(x) = ۲$

ب) $f(۱) = ۲$

پ) $f(۲) = ۱$

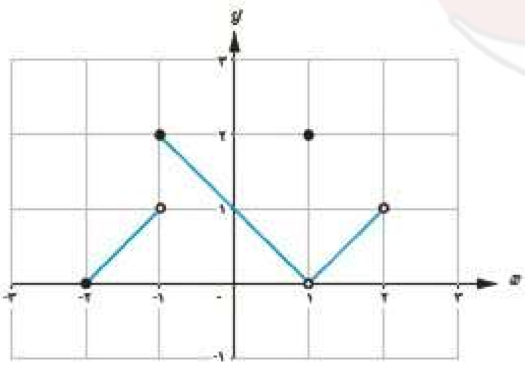
ت) $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = ۰$

ث) $\lim\limits_{x \to -۱} f(x) = ۲$

ج) $\lim\limits_{x \to ۰} f(x) = ۱$

چ) $\lim\limits_{x \to ۲} f(x)$ وجود ندارد.

ح) $\lim\limits_{x \to -۱} f(x)$ وجود ندارد.




**۸۳** تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = a\,[x] + [x + ۱]$ مفروض است. مقدار a را چنان بیابید که $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$ موجود است.

([ ] نماد جزء صحیح است.)

**۸۴** حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x+۳}{\sqrt{۵x+۱}}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^-} (۱-[x])$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۲-۴}{x^۲-۷x+۱۰}$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\cos x-\sin x}$

**۸۵** اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۲x^۲-۴a} & x\geq ۲\\ x+b & -۲\leq x<۲\\ x^۲+bx+۳a & x<-۲\end{cases}$ باشد، b و a را طوری بیابید که تابع f در نقطه‌ی $x=-۲$ دارای حد بوده و $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۲$ باشد.

**۸۶** حد مقابل را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲-۵x+۶}{۲x^۲-۷x+۳}$$

**۸۷** حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۷} -۳$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} (-x-۷)$

پ) $\lim\limits_{x\to -۱} (۳x^۲-۴x+۵)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^۲-۳x}{x^۲-۹}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{x}{۲x^۲-x}$

ج) $\lim\limits_{x\to -۲} \dfrac{x^۳+۸}{x+۲}$

چ) $\lim\limits_{x\to -۲} [x]$

ح) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \sqrt{x}$

خ) $\lim\limits_{x\to ۲} \sqrt{x+۷}$

د) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \sqrt{x}$

ذ) $\lim\limits_{x\to ۲} \sqrt{x+۵}$

ر) $\lim\limits_{x\to ۱} \sqrt{x-۲}$

ز) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \dfrac{x-۲}{[x]+۱}$

ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۳}} \cos x$

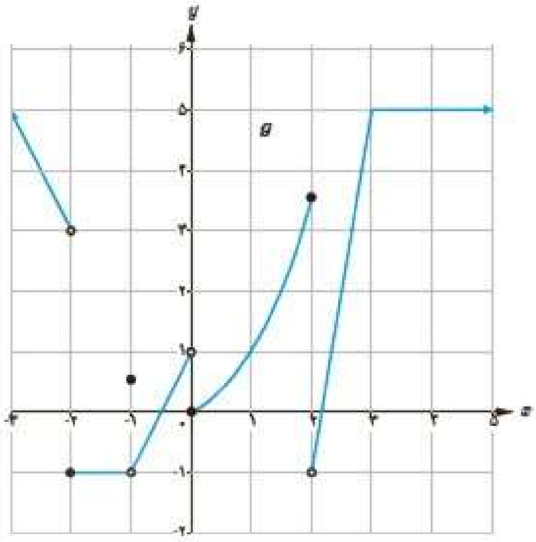
س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} (\sin x+\cos x)$

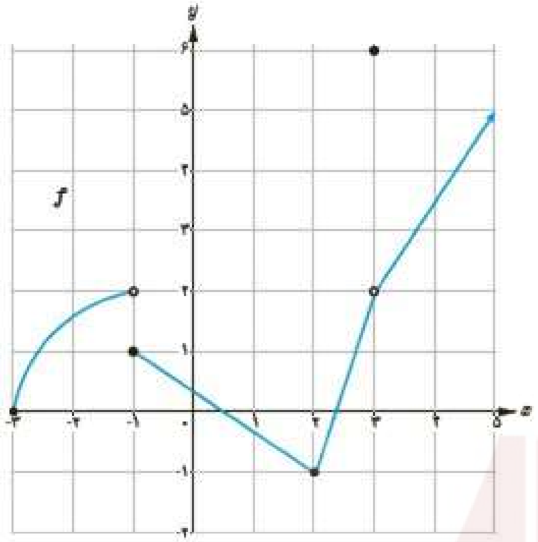
ش) $\lim\limits_{x\to -۲^+} \dfrac{x}{[x]}$

ص) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۲+x-۶}{x^۲-۶x+۸}$

ض) $\lim\limits_{x\to ۰} (x+[x])$

۸۸ با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.




الف) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to 3} (f(x)+g(x))$

ث) $\lim\limits_{x\to -1} (f(x)+g(x))$

ج) $\lim\limits_{x\to 2} (2f(x)+5g(x))$

چ) $\lim\limits_{x\to 0} (f(x))^4$

ح) $\lim\limits_{x\to 0} (g(x))^2$

خ) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

د) $\lim\limits_{x\to 5} (f(x).g(x))$

۸۹ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} -2x+2 & x\leq 0 \\ x^2+2 & x>0 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

۹۰ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-3 & x<2 \\ -2 & x=2 \\ -x+2 & x>2 \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۹۱ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه ی $x_0=2$ پیوسته باشد.

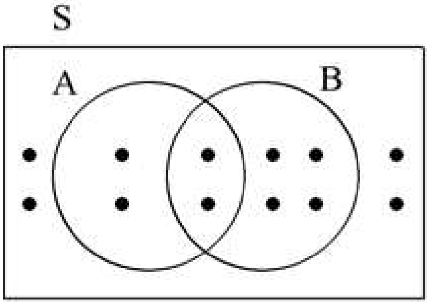
$$f(x)=\begin{cases} \frac{x+2b}{x^2-2} & ;\ x>2 \\ 2a+x+1 & ;\ x=2 \\ 2b+5 & ;\ x<2 \end{cases}$$

۹۲ مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} 3x-[x] & x<0 \\ a & x=0 \\ \sqrt{x+1}+b & x>0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته باشد.

([] نماد جزء صحیح است.)

۹۳ نقاط ناپیوستگی تابع $y=\dfrac{x+3}{x^2-x-12}$ را تعیین کنید.

۹۴ با توجه به شکل مقابل، آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟




۹۵ جدول زیر را کامل کنید.

| P(A) | P(B) | P(A ∪ B) | P(A ∩ B) | P(A\|B) | P(B\|A) |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۷ | | ۰/۹ | ۰/۵ | | |

۹۶ دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آن‌که هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرط این‌که بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر۸ است را به دست آورید.

۹۷ احمد به احتمال ۰/۷ در تیم کوهنوردی مدرسه‌شان و به احتمال ۰/۸ درتیم‌ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم موردنظر انتخاب شود.
ب) در هیچ‌کدام از دو تیم انتخاب نشود.
پ) فقط در تیم‌ملی فوتبال انتخاب شود.
ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.
ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

۹۸ در داده‌های زیر:

۱۹ ,۸ ,۱۵ ,۷ ,۴ ,۵ ,۱۲ ,۱۱ ,۱۰ ,۱۲ ,۱۷

الف) میانه را به دست آورید.
ب) دامنه تغییرات را محاسبه کنید.
ج) مد را مشخص کنید.

۹۹ جدول زیر، پول توجیبی (ده هزار ریال) هفتگی پنج دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می‌دهد.
الف) میانگین و میانه‌ی پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید.
ب) انحراف معیار پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید.
پ) برنامه‌ریزی برای یک سفر یک روزه با دوستان برای مینا ساده‌تر است یا مریم؟

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| مینا | ۲۳ | ۲۴ | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ |
| مریم | ۱۵ | ۲۰ | ۲۵ | ۳۰ | ۳۵ |

۱۰۰ برای اعداد زیر مطلوب است واریانس، انحراف معیار، ضریب تغییرات.

۳۲ ـ ۵۹ ـ ۲۶ ـ ۵۳ ـ ۷۴ ـ ۱۷ ـ ۴۵ ـ ۲۳ ـ ۶۴ ـ ۵۰ ـ ۶۳

**۱** از روش بند کفش استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{lcc} A: & 4 & 1 \\ B: & 7 & -2 \\ C: & -1 & 5 \\ A: & 4 & 1 \end{array}$$

قرمز $= -8 + 35 - 1 = 26$

آبی $= 7 + 2 + 20 = 29$

$$S = \frac{1}{2}|29 - 26| = \frac{3}{2} = 1/5$$

**۲**

$$m_{AB} = \frac{3-(-1)}{4-2} = 2 \xrightarrow{\text{شیب را قرینه و معکوس می کنیم}} m' = -\frac{1}{2}$$

$$M \left| \begin{array}{l} \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{-1+3}{2} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}(x-3) \Rightarrow 2y - 2 = -x + 3 \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$$

**۳**

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$AC = \sqrt{(2-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$BC = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

محیط $P = AB + AC + BC = 3 + 2 + \sqrt{13} = 5 + \sqrt{13}$

**۴** ۱) معادله خط BC را حساب کنیم.

$$m_{BC} = \frac{0-4}{7-(-1)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{2}(x-7) \Rightarrow 2y = -x + 7 \Rightarrow x + 2y - 7 = 0$$

۲) فاصله نقطه A تا خط BC (فرمول d)

$$d = \frac{|2 + 2 - 7|}{\sqrt{1+4}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

**۵** باید فاصله A تا دو خط را حساب کنیم که طول و عرض محاسبه می‌شود.

$$d_1 = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - 5 + 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$d_2 = \frac{|a'x_1 + b'y_1 + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} = \frac{|10 + 1 + 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{14}{\sqrt{5}}$$

$$S = d_1 \times d_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{14}{\sqrt{5}} = \frac{28}{5}$$

**۶**

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{m+5}{2} = 3 \Rightarrow m + 5 = 6 \Rightarrow m = 1$$

۷ الف) باید به جای x عدد ۵ قرار دهیم و برابر صفر می‌گذاریم.

$$25-5k+k+3=0 \xrightarrow{x=5} -4k=-28 \Rightarrow k=7$$

ب)

$$f(x)=x^2-7x+10=0 \Rightarrow (x-5)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=2 \end{cases}$$

بنابراین صفر دیگر تابع $x=2$ است.



حروف‌چینی ریاضی: ۸۰٪

**۸** الف) راه اول:

$f(0)=c \Rightarrow c=0$

$f(2)=0 \Rightarrow 4a+2b=0$

$f(0)=0$

با توجه به این‌که دو نقطه‌ی ۰ و ۲ دارای عرض‌های برابر هستند پس می‌توانیم طول رأس سهمی را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\frac{0+2}{2}=1$$

$$f(1)=-4 \Rightarrow a+b=-4$$

$$\begin{cases}a+b=-4\\4a+2b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2a-2b=8\\4a+2b=0\end{cases} \Rightarrow 2a=8 \Rightarrow a=4 \Rightarrow b=-8$$

$$f(x)=4x^2-8x$$

راه دوم:

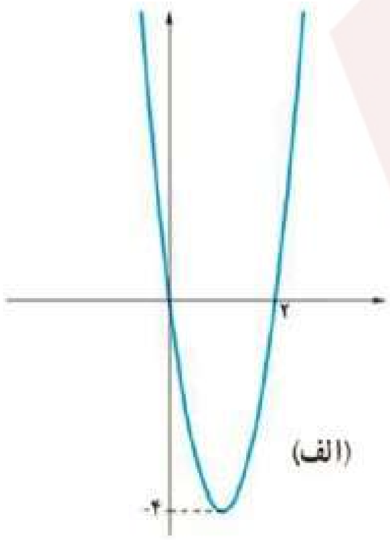
$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-4 \Rightarrow a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)=-4 \Rightarrow \frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}=-4 \Rightarrow b^2=16a$$

$$\begin{cases}4a+2b=0\\b^2=16a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}16a+8b=0\\b^2=16a\end{cases} \Rightarrow b^2+8b=0 \Rightarrow b(b+8)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}b=-8 \Rightarrow a=4\\b=0 \Rightarrow a=0\end{cases} \Rightarrow f(x)=4x^2-8x$$

راه سوم:

$$y=f(x)=a(x-h)^2+k$$



(الف)

$$k=-4$$

$$f(0)=0 \Rightarrow a(0-h)^2-4=0 \Rightarrow ah^2=4$$

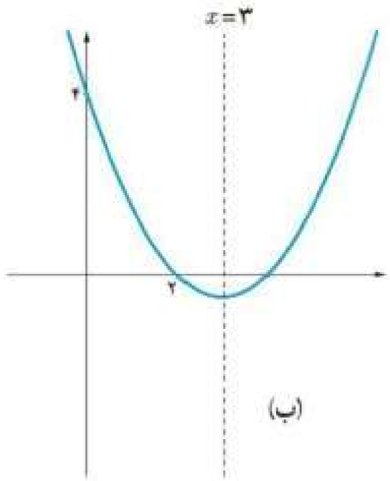
$$f(2)=0 \Rightarrow a(2-h)^2-4=0$$

$$4a-4ah+ah^2-4=0 \xrightarrow{ah^2=4} 4a-4ah+4-4=0$$

$$4a-4ah=0 \Rightarrow 4a(1-h)=0 \xrightarrow{a\neq 0} 1-h=0 \Rightarrow h=1$$

$$ah^2=4 \xrightarrow{h=1} a=4 \Rightarrow y=f(x)=4(x-1)^2-4$$

$$\Rightarrow f(x)=4x^2-8x$$



(ب)

ب) $x=3 \Rightarrow -\frac{b}{2a}=3 \Rightarrow b=-6a$

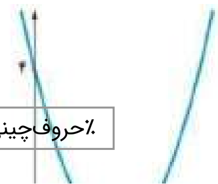
$$f(0)=4 \Rightarrow c=4$$

$$f(2)=0 \Rightarrow 4a+2b+4=0$$

$$\begin{cases}4a+2b+4=0\\b=-6a\end{cases} \Rightarrow 4a-12a+4=0$$

$$\Rightarrow -8a+4=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow b=-3$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+4$$




پ) $x=2 \Rightarrow -\frac{b}{2a}=2 \Rightarrow b=-4a$





$$f(0)=4 \Rightarrow c=4$$

$$f(2)=0 \Rightarrow 4a+2b+4=0$$

$b = -4a$

$4a + 8a + 4 = 0 \Rightarrow 4a + 2b + 4 = 0$

**۹**

$f(x) = x^2 - 4x + 4$

$\Rightarrow -4a + 4 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b$

$\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ , $\beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$S = \alpha + \beta = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$P = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{9-5}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

ت) $f(0) = 3 \Rightarrow c = 3$

**۱۰**

$x = 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow b$

$\text{محیط} = 28 \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 28 \Rightarrow \alpha + \beta = 14 \Rightarrow S = 14$

$f(-1) = 0 \Rightarrow a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$

$\text{مساحت} = 46 \Rightarrow \alpha\beta = 46 \Rightarrow P = 46$

$f(x) = -3x^2 + 3$

$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 46 = 0 \Rightarrow x^2 - 14x = -46 \xrightarrow{+49} x^2 - 14x + 49 = 3$

$\Rightarrow (x-7)^2 = 3 \Rightarrow x - 7 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 7 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 7 + \sqrt{3} \ (\text{طول}) \\ \beta = 7 - \sqrt{3} \ (\text{عرض}) \end{cases}$

راه اول:

**۱۱**

$f(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x) - 15 = 0 \xrightarrow{t = x^2 + 4x} t^2 - 2t - 15 = 0$

$\Rightarrow (t - 5)(t + 3) = 0 \Rightarrow$

$S(2,1)$

$t = 5 \Rightarrow x^2 + 4x = 5 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}$

ث) $y = f(x) = a(x-h)^2 + k$, $s(2,1) \Rightarrow h = 2, k = 1$

$t = -3 \Rightarrow x^2 + 4x = -3 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+3) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$

$f(1) = 0 \Rightarrow a(1-2)^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

$f(x) = -(x-2)^2 + 1 = -x^2 + 4x - 3$

**۱۲**

$y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{\text{محور } y \text{ ها را در نقطه ای به عرض یک قطع می کند}} A(0,1)$

$\Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 1 \Rightarrow c = 1$

(ث)

$B(1,6) \Rightarrow a(1)^2 + b(1) + 1 = 6 \Rightarrow a + b = 5$

$C(-3,22) \Rightarrow a(-3)^2 + b(-3) + 1 = 22 \Rightarrow 9a - 3b = 21 \Rightarrow 3a - b = 7$ راه دوم: $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -4a$

$f(2) = 1 \Rightarrow 4a + 2b + c = 1$ , $\begin{cases} a + b = 5 \\ 3a - b = 7 \end{cases}$

$f(2) = 1 \Rightarrow 4a + 2b + c = 1 \xrightarrow{b = -4a} -4a + c = 1$

**۱۳** برای به دست آوردن ارتفاع ماکزیمم به روش زیر عمل می‌کنیم.

$h = -\frac{b}{2a} = \frac{-216}{2(-18)} = \frac{-216}{-36} = 6$ , $\begin{cases} -3a + c = 0 \\ -4a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow -4a + c = 1$

زمانی‌که موشک به زمین برخورد می‌کند ارتفاع برابر صفر است بنابراین:

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$

راه اول: ج)

$h(t) = 0 \Rightarrow -18t^2 + 216t = 0 \Rightarrow t(-18t + 216) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 12s \end{cases}$

۱۲ ثانیه طول می‌کشد تا موشک به زمین برخورد کند.

**۱۴** الف) درست

ب) درست

$S(1,-1)$

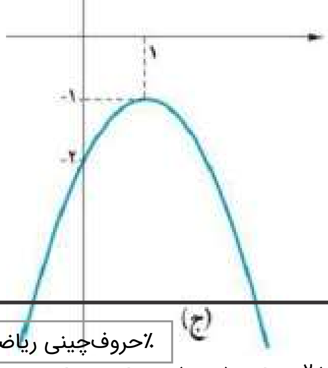
$f(0) = -2 \Rightarrow c = -2$

$f(1) = -1 \Rightarrow a + b - 2 = -1 \Rightarrow a + b = 1$

$x = 1 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$

$\begin{cases} a + b = 1 \\ b = -2a \end{cases} \Rightarrow a - 2a = 1 \Rightarrow a = -1, b = 2$

$f(x) = -x^2 + 2x - 2$




(ج)





راه دوم: $f(x) = a(x-h)^2 + k$, $s(1,-1) \Rightarrow h = 1, k = -1$ ??

$f(0) = -2 \Rightarrow a(0-1)^2 - 1 = -2 \Rightarrow a = -1$

**۱۵**

$f(x) = -(x-1)^2 - 1 = -x^2 + 2x - 2$

$x(\text{مسافت طی شده}) = V(\text{سرعت}).t(\text{زمان}) \Rightarrow t = \frac{x}{V}$

$t_{\text{رفت}} - t_{\text{برگشت}} = 4 \Rightarrow \frac{96}{V-10} - \frac{96}{V+10} = 4 \xrightarrow{\div 4} \frac{24}{V-10} - \frac{24}{V+10} = 1$

$\xrightarrow{\times (V+10)(V-10)} 24(V+10) - 24(V-10) = V^2 - 100 \Rightarrow 24V + 240 - 24V + 240$

$= V^2 - 100 \Rightarrow V^2 + 48V - 100 = 0 \Rightarrow (V+50)(V-2) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} V = 2 \text{ ق ق} \\ V = -50 \text{ غ ق ق} \end{array}\right.$

۱۶

الف) $5 = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{x}$

$5\times(2-x)x = \frac{1}{(2-x)}\times(2-x)x + \frac{1}{x}\times(2-x)x$

$0 = 2 + 12x - 5x^2 \Rightarrow 10x - 5x^2 = x + 2 - x$

$\frac{2\sqrt{26} \pm 12}{10} = x \Rightarrow 104 = \Delta$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا هیچ‌یک مخرج را صفر نمی‌کنند.

ب) $5 - \frac{20}{3r} = \frac{15}{2} - \frac{10}{r}$

$5\times 6r - \frac{20}{3r}\times 6r = \frac{15}{2}\times 6r - \frac{10}{r}\times 6r$

$\frac{4}{3} = r \Rightarrow 15r = 20 \Rightarrow 30r - 40 = 45r - 60$

$0 = 0 \Rightarrow 5 - 5 = \frac{30}{4} - \frac{30}{4} \Rightarrow 5 - \frac{20}{\frac{4}{3}\times 3} = \frac{15}{2} - \frac{10}{\frac{4}{3}}$

پ) $\frac{1-x}{3-x} = \frac{1+x}{4+x} + \frac{2x}{3-x}$

$\frac{(1-x)}{(3-x)}\times(4+x)(3-x) = \frac{(1+x)}{(4+x)}\times(4+x)(3-x) + \frac{2x}{(3-x)}\times(4+x)(3-x)$

$0 = 1 + 3x + 2x^2 \Rightarrow 4 - 3x + x^2 = 3 - 2x - x^2 + 8x + 2x^2$

$-\frac{1}{2} = x, -1 = x \Rightarrow 1 = \Delta$

هر دو ریشه قابل قبول است زیرا هیچ‌یک باعث صفر شدن مخرج‌ها نمی‌شوند.

ت) $3 = \sqrt{4+t}$

$3 = \sqrt{9} = \sqrt{4+5} \Rightarrow 5 = t \Rightarrow 9 = 4 + t \Rightarrow 3^2 = (\sqrt{4+t})^2$

ث) $\sqrt{8-6k} = k$

$0 = (2-k)(4-k) \Rightarrow 0 = 8 + 6k - k^2 \Rightarrow 8 - 6k = k^2 \Rightarrow (\sqrt{8-6k})^2 = k^2$

$2 = k, 4 = k \Rightarrow$

$4 = 4 \Rightarrow \sqrt{8-24} = 4 \Rightarrow 4 = k$

$2 = 2 \Rightarrow \sqrt{8-12} = 2 \Rightarrow 2 = k$

هر دو ریشه قابل قبول هستند.

ج) $6 = \sqrt{x} + x$

$0 = 36 + 13x - x^2 \Rightarrow x^2 + 12x - 36 = x \Rightarrow (x-6)^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x - 6 = \sqrt{x}$

$9 = x, 4 = x \Rightarrow 0 = (9-x)(4-x) \Rightarrow$

$6 = 6 \Rightarrow 6 = \sqrt{4} + 4 \Rightarrow 4 = x$

$6 \neq 12, 6 = 12 \Rightarrow 6 = \sqrt{9} + 9 \Rightarrow 9 = x$

همان‌طور که دیده می‌شود $x = 9$ قابل قبول نیست.

چ) $1 = \sqrt{5-2x} - \sqrt{1+x}$

$5 - 2x = 1 + 2\sqrt{1+x} - 1 + x \Rightarrow (\sqrt{5-2x})^2 = (1 - \sqrt{1+x})^2 \Rightarrow \sqrt{5-2x} = 1 - \sqrt{1+x}$

$49 + 14x - x^2 = 4 + 4x \Rightarrow (7-x)^2 = (-2\sqrt{1+x})^2 \Rightarrow 7 - x = -2\sqrt{1+x} \Rightarrow$

$15 = x, 3 = x \Rightarrow 0 = (15-x)(3-x) \Rightarrow 0 = 45 + 18x - x^2 \Rightarrow$

$1 = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt{1} - \sqrt{4} \Rightarrow 3 = x$

$1 \neq -1, 1 = -1 \Rightarrow 1 = \sqrt{25} - \sqrt{16} \Rightarrow 15 = x$



همان‌طور که دیده می‌شود $x = 15$ قابل قبول نیست.

٪حروفچینی ریاضی: ۸۰

ح) $2 = \frac{1}{\ldots} + \sqrt{m}$

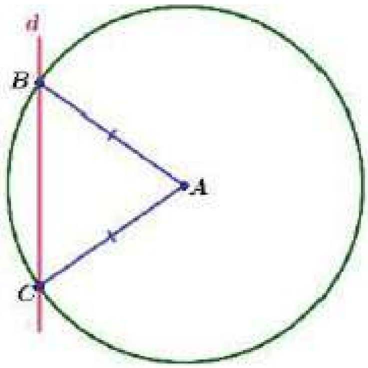
$^{2}(\overline{m}\sqrt{2}) = {}^{2}(1 + m) \Rightarrow \overline{m}\sqrt{2} = 1 + m \Rightarrow 2\times\overline{m}\sqrt{} = \frac{1}{\overline{m}\sqrt{}}\times\overline{m}\sqrt{} + \overline{m}\sqrt{}\times\overline{m}\sqrt{}$

**۱۷** الف) دایره‌ای به مرکز A و شعاع r (بیش‌تر از ۴ باشد) می‌زنیم محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است زیرا: $r = AB = AC$

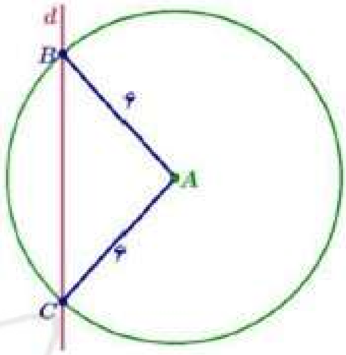
$1 = m \Rightarrow 0 = {}^{2}(1 - m) \Rightarrow 0 = 1 + m2 - {}^{2}m \Rightarrow m4 = 1 + m2 + {}^{2}m \Rightarrow$

$2 = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{\overline{1}\sqrt{}} + \overline{1}\sqrt{} \Rightarrow 1 = m$

دله یک جواب قابل قبول دارد.




ب) دایره‌ای به مرکز A و شعاع $r = ۶$ می‌زنیم محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است زیرا: $۶ = AB = AC$



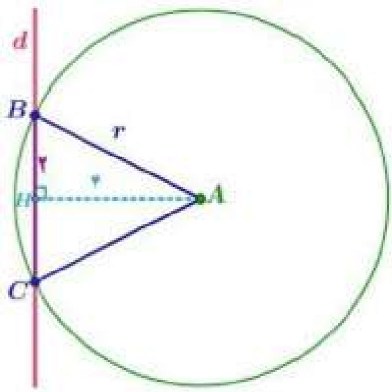

پ) چون فاصله عمودی نقطه‌ی A از خط d برابر ۴ است و این فاصله همان ارتفاع مثلث است، اگر بخواهیم مساحت این مثلث ۸ سانتی‌متر مربع باشد باید قاعده آن ۴ سانتی‌متر باشد یعنی فاصله دو نقطه B و C روی خط d برابر ۴ باشد. در نتیجه طبق قضیه فیثاغورث داریم:

$^{2}(2) + {}^{2}(4) = {}^{2}r \Rightarrow {}^{2}(BH) + {}^{2}(AH) = {}^{2}(AB)$

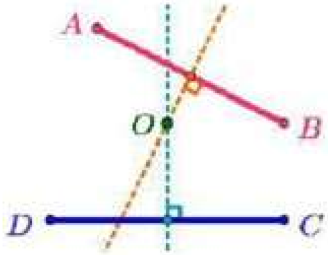
$\overline{20}\sqrt{} = r \Rightarrow 20 = 4 + 16 =$

بنابراین اگر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{20}$ بزنیم و محل بخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس‌های مثلث است زیرا:

$8 = (4)(4)\frac{1}{2} = {}_{ABC}S$.این همان مثلثی است که مساحت آن ۸ می‌شود $\overline{20}\sqrt{} = AB = AC$



**۱۸** الف) نقطه‌ی موردنظر محل برخورد عمودمنصف‌های دو پاره‌خط AB و CD است.



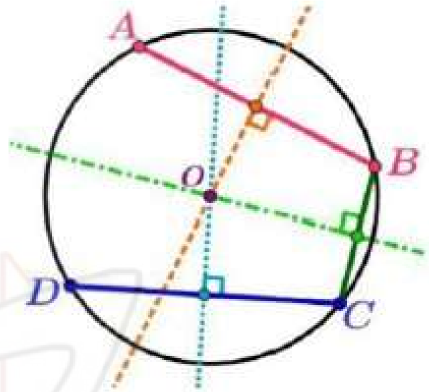

ب) چهار نقطه $A, B, C, D$ روی دایره G قرار خواهند داشت. زیرا:

چون O روی عمودمنصف AB است پس: $OA = OB$ (۱)

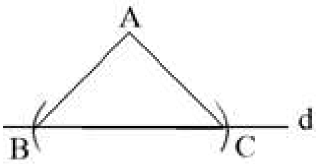
چون O روی عمودمنصف CD است پس: $OC = OD$ (۲)

چون O روی عمودمنصف BC است پس: $OC = OB$ (۳)

پس طبق روابط ۱، ۲، ۳ خواهیم داشت: $OA = OB = OC = OD$ و چون شعاع دایره برابر OA است پس حتماً ۴ نقطه روی دایره G قرار خواهند داشت.



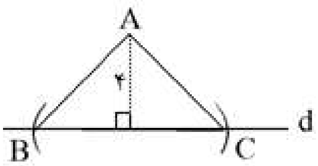

**۱۹** الف) کافی است به مرکز A و شعاعی که اندازه‌اش بیش‌تر از فاصله‌ی A تا d باشد کمانی بزنیم تا خط d را در ۲ نقطه به نام‌های B و C قطع کند. مثلث متساوی‌الساقین ABC به دست می‌آید.




شعاع دایره = $AB = AC$ ⇐ مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

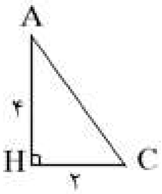
ب) کافی است کمانی به مرکز A و شعاع ۶ سانتی‌متر بزنیم تا خط d را در نقاطی مثل N و M قطع کند، مثلث AMN متساوی‌الساقین بوده و طول ساق‌های آن ۶ سانتی‌متر است.

پ) طبق شکل، AH ارتفاع وارد بر قاعده است و داریم:




مساحت $S = \frac{AH \times BC}{2} \Rightarrow 8 = \frac{4 \times BC}{2} \Rightarrow BC = 4$

در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر وتر، میانه هم هست لذا: $BH = HC = 2$ بنابراین:




فیثاغورس $AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow AC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$

$\xrightarrow{\text{جذر}} AC = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$

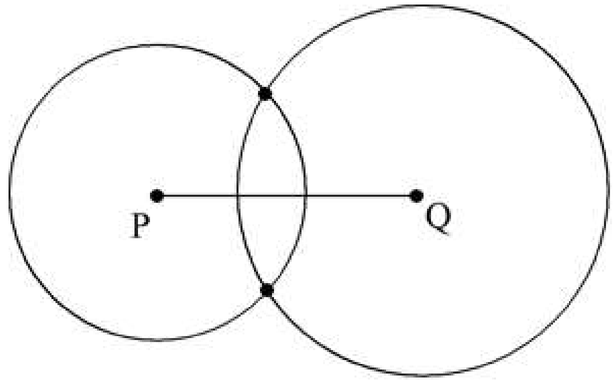
پس باید به مرکز A و شعاع $2\sqrt{5}$ کمان بزنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند، مثلث ABC جواب است.



٪حروف‌چینی ریاضی: ۸۰

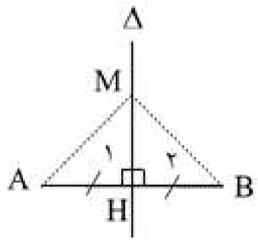
۲۰ الف) در پاره‌خط موازی PQ به فاصله ۲ سانتی‌متر

ب) باید دو دایره به مرکزیت P به شعاع ۴ و به مرکزیت Q به شعاع ۵ واحد رسم کنیم و این دو دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.




۲۱ پاره‌خط دلخواهی مانند AB درنظر می‌گیریم. خط $\Delta$، عمودمنصف خط AB را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی دلخواهی مانند M روی آن درنظر می‌گیریم. باید ثابت کنیم فاصله‌ی M از دو نقطه‌ی A و B به یک اندازه است، یعنی MB = MA

برای اثبات، M را به A و B وصل می‌کنیم. دو مثلث MAH و MBH را درنظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم این دو مثلث همنهشت می‌باشند.




$$\overset{\triangle}{HBM} \cong \overset{\triangle}{HAM} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \begin{cases} HB = AH \ (\text{است AB وسط } H) \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ MH = MH \end{cases}$$

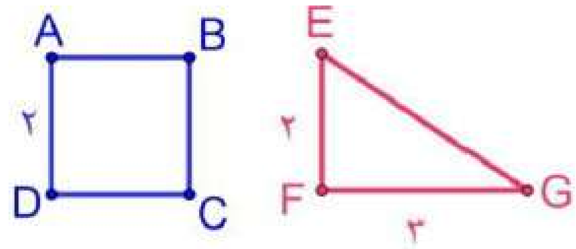
پس سایر اجزای دو مثلث با هم برابرند و در نتیجه MB = MA است.



٪حروف‌چینی ریاضی: ۸۰

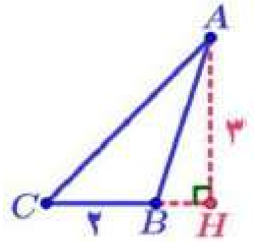
**۲۲** الف) ۲۱۱ عدد اول است و از ۱۲۷ بزرگتر است.

ب)

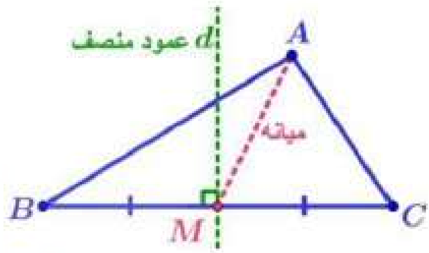



$S_{\triangle EFG} < S_{\square ABCD} \Leftarrow S_{\square ABCD} = ۲\times۲ = ۴ ,\ S_{\triangle EFG} = \frac{۱}{۲}\times۲\times۳ = ۳$

پ)




ت)




**۲۳** الف) اگر در مثلثی سه زاویه برابر باشند، آن‌گاه سه ضلع نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل برابر باشند آن‌گاه در این صورت اضلاع روبه‌رو موازی هستند.

پ) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل مکمل باشند آن‌گاه در این صورت رأس‌های آن چهارضلعی روی یک دایره هستند.

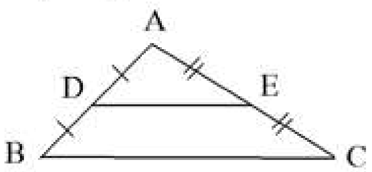
ت) اگر در یک مثلث دو ضلع نابرابر باشند، آن‌گاه ارتفاع به ضلع بزرگ‌تر کوچک‌تر از ارتفاع متناظر به ضلع کوچک‌تر است.

**۲۴**

$$\begin{cases} ۵x = a \Rightarrow x = \frac{a}{۵} \\ ۷x = b \Rightarrow x = \frac{b}{۷} \\ ۱۳x = c \Rightarrow x = \frac{c}{۱۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{۷}{۲۶} = \frac{۷x}{۲۶x} = \frac{۲۸x - ۳۵x}{۲۶x} = \frac{۴(۷x) - ۷(۵x)}{۲(۱۳x)} = \frac{۴b - ۷a}{۲c}$$

**۲۵**

$$\underset{(۰/۲۵)}{\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{۱}{۲}} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} \underset{(۰/۲۵)}{DE \parallel BC} \xrightarrow{\text{تالس}} \underset{(۰/۲۵)}{\frac{DE}{BC} = \frac{۱}{۲}} \Rightarrow \underset{(۰/۲۵)}{DE = \frac{۱}{۲}BC}$$



**۲۶** الف) با توجه به قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{QC}\Rightarrow\frac{۹}{x}=\frac{x}{۴}\Rightarrow x^{۲}=۳۶\Rightarrow x=۶$$

با توجه به تعمیم قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}\Rightarrow\frac{x}{x+۴}=\frac{۲y-۱}{x+۲}\xrightarrow{x=۶}\frac{۶}{۱۰}=\frac{۲y-۱}{۸}\Rightarrow ۲y-۱=\frac{۴۸}{۱۰}\Rightarrow ۲y-۱=۴/۸$$

$$\Rightarrow ۲y=۵/۸\Rightarrow y=۲/۹$$

ب) با توجه به قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{CQ}\Rightarrow\frac{۴x}{۵}=\frac{۲۰}{x}\Rightarrow ۴x^{۲}=۱۰۰\Rightarrow x^{۲}=۲۵\Rightarrow x=۵$$

با توجه به تعمیم قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}\Rightarrow\frac{۲۰}{۲۰+x}=\frac{y-۱۰}{x+۱۵}\xrightarrow{x=۵}\frac{۲۰}{۲۵}=\frac{y-۱۰}{۲۰}\Rightarrow y-۱۰=۲۵\Rightarrow y=۳۵$$

**۲۷** فرض می‌کنیم DE با BC موازی نباشد آن‌گاه از B خطی به موازات DE رسم می‌کنیم تا AC را در C قطع کند آن‌گاه داریم:

$$\left.\begin{matrix}\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}\\ \frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}\end{matrix}\right\}\Rightarrow EC=EC$$

امکان ندارد $BC \parallel DE \Leftarrow$

پس C و C منطبق‌اند پس $BC \parallel DE$

**۲۸**

$$\frac{x+y+z}{۱۲}=\frac{۲}{۷}\Rightarrow x+y+z=\frac{۲۴}{۷}$$

**۲۹** خیر

مثال نقض $\Leftarrow a=\sqrt{۲},\quad b=۲\sqrt{۲},\quad c=\sqrt{۳}$

$$abc^{۲}=\sqrt{۲}\times ۲\sqrt{۲}\times(\sqrt{۳})^{۲}=۱۲$$

**۳۰** از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\sqrt{۵}$ گنگ نباشد، پس گویاست.

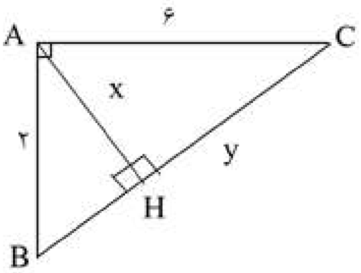
$$\sqrt{۵}=\frac{p}{q}\quad p,q\in z,\quad q\neq ۰,\quad (p,q)=۱\quad \frac{p^{۲}}{q^{۲}}=۵\Rightarrow p^{۲}=۵q^{۲}$$

چون $p^{۲}$ مضرب ۵ است پس $p$ هم مضرب ۵ است، یعنی $p=۵k$ در نتیجه $p^{۲}=۲۵k^{۲}$

$$۵q^{۲}=۲۵k^{۲}\Rightarrow q^{۲}=۵k^{۲}$$

$q^{۲}$ مضرب ۵ است پس $q$ هم مضرب ۵ است. در این صورت $p$ و $q$ هردو مضرب ۵ هستند و نمی‌توانند نسبت به هم اول باشند و این تناقض است پس خلاف حکم نادرست و حکم درست است. یعنی $\sqrt{۵}$ گنگ است.

**۳۱** در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\triangle}{CBA}$ داریم:




$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow y^2 = ۲^2 + ۶^2 \Rightarrow y^2 = ۴۰$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{۴۰} = ۲\sqrt{۱۰}$$

$$AC \times AB = BC \times AH \Rightarrow ۶ \times ۲ = ۲\sqrt{۱۰} \times x \Rightarrow x = \frac{۶}{\sqrt{۱۰}} \times \frac{\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}}$$

$$\frac{۶\sqrt{۱۰}}{۱۰} \Rightarrow x = \frac{۳\sqrt{۱۰}}{۵}$$

**۳۲**

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{EDA}}}{S_{\overset{\triangle}{CBA}}} = \frac{\frac{۱}{۲} AD \times AE \operatorname{Sin} A}{\frac{۱}{۲} AB \times AC \operatorname{Sin} A} = \frac{AD \times AE}{AB \times AC} = \frac{۳ \times ۵}{۱۰ \times ۹} = \frac{۱}{۶}$$

**۳۳** چون دو مثلث $A'H'B'$ و $AHB$ متشابه‌اند. پس داریم:

$$\hat{C} = \hat{C'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{A} = \hat{A'}, \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = K$$

الف) چون $\hat{H} = \hat{H'} = ۹۰^\circ$ و $\hat{B} = \hat{B'}$ پس بنا به حالت برابری دو زاویه این دو مثلث $A'H'B'$ و $AHB$ متشابه‌اند.

ب) دو مثلث $A'H'B'$ و $AHB$ متشابه‌اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. لذا داریم:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AH}{A'H'} = \frac{BH}{B'H'}, \frac{AB}{A'B'} = K \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = K$$

پ)

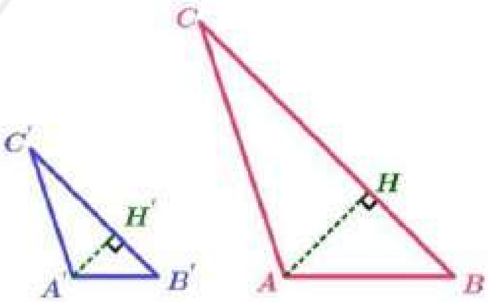
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{۱}{۲} BC \times AH}{\frac{۱}{۲} B'C' \times A'H'} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{BC}{B'C'} \times \frac{AH}{A'H'} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = K^2$$

ت)

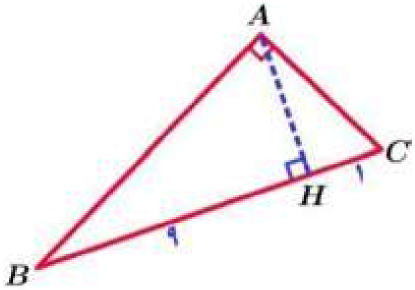
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = K \Rightarrow AB = KA'B', BC = KB'C', AC = KA'C'$$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{AB + BC + AC}{A'B' + B'C' + A'C'} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{KA'B' + KB'C' + KA'C'}{A'B' + B'C' + A'C'}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{K(A'B' + B'C' + A'C')}{A'B' + B'C' + A'C'} \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = K$$



۳۴




الف) $AC = ?\,,\ AB = ?\,,\ AH = ?\,,\ BH = 9\,,\ BC = 10$

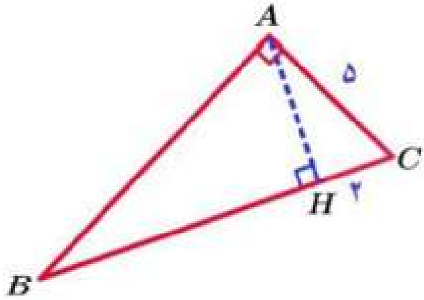
$BC = HC + BH \Rightarrow 10 = HC + 9 \Rightarrow HC = 10 - 9 \Rightarrow HC = 1$

$(AH)^2 = HC \times BH \Rightarrow (AH)^2 = 1 \times 9 \Rightarrow (AH)^2 = 9 \Rightarrow AH = 3$

$(AB)^2 = BC \times BH \Rightarrow (AB)^2 = 10 \times 9 \Rightarrow (AB)^2 = 90$

$\Rightarrow AB = \sqrt{90}$

$(AC)^2 = BC \times HC \Rightarrow (AC)^2 = 10 \times 1 \Rightarrow (AC)^2 = 10 \Rightarrow AC = \sqrt{10}$



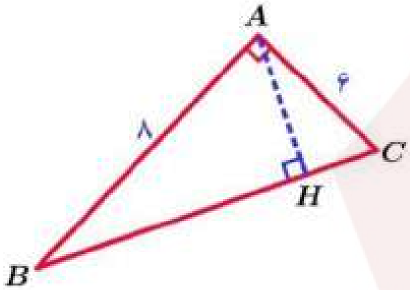

ب) $AB = ?\,,\ AH = ?\,,\ BC = ?\,,\ CH = 2\,,\ AC = 5$

$(AC)^2 = BC \times HC \Rightarrow (5)^2 = BC \times 2 \Rightarrow BC = \frac{25}{2}$

$BC = HC + BH \Rightarrow \frac{25}{2} = 2 + BH \Rightarrow BH = \frac{25}{2} - 2 \Rightarrow BH = \frac{21}{2}$

$(AH)^2 = HC \times BH \Rightarrow (AH)^2 = 2 \times \frac{21}{2} \Rightarrow (AH)^2 = 21 \Rightarrow AH = \sqrt{21}$

$(AB)^2 = BC \times BH \Rightarrow (AB)^2 = \frac{25}{2} \times \frac{21}{2} \Rightarrow (AB)^2 = \frac{25 \times 21}{4} \Rightarrow AB = \frac{5\sqrt{21}}{2}$



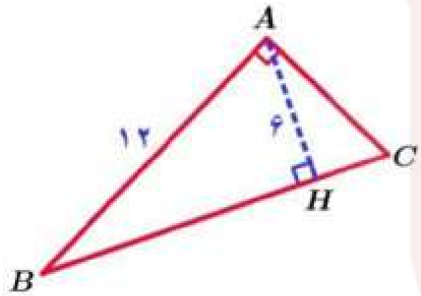

پ) $AH = ?\,,\ BC = ?\,,\ AC = 6\,,\ AB = 8$

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 \Rightarrow (BC)^2 = (6)^2 + (8)^2$

$= 36 + 64 = 100 \Rightarrow BC = 10$

$(AB)^2 = BC \times BH \Rightarrow (8)^2 = 10 \times BH \Rightarrow BH = \frac{64}{10}$

$AC \times AB = BC \times AH \Rightarrow 8 \times 6 = 10 \times AH \Rightarrow AH = \frac{48}{10}$




$AC = ?\,,\ BC = ?\,,\ BH = ?\,,\ AH = 6\,,\ AB = 12$

$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 \Rightarrow (12)^2 = (6)^2 + (BH)^2$

$\Rightarrow (BH)^2 = 144 - 36 = 108 \Rightarrow BH = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

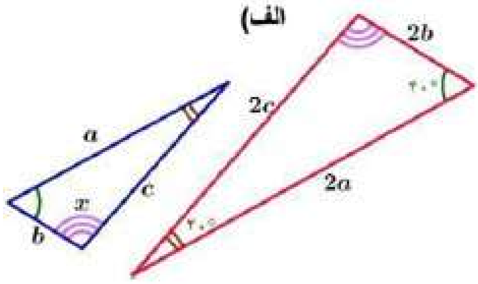
$(AB)^2 = BC \times BH \Rightarrow (12)^2 = BC \times 6\sqrt{3} \Rightarrow BC = \frac{144}{6\sqrt{3}} \Rightarrow BC = \frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow BC = 8\sqrt{3}$

$BC = HC + BH \Rightarrow 8\sqrt{3} = HC + 6\sqrt{3} \Rightarrow HC = 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \Rightarrow HC = 2\sqrt{3}$

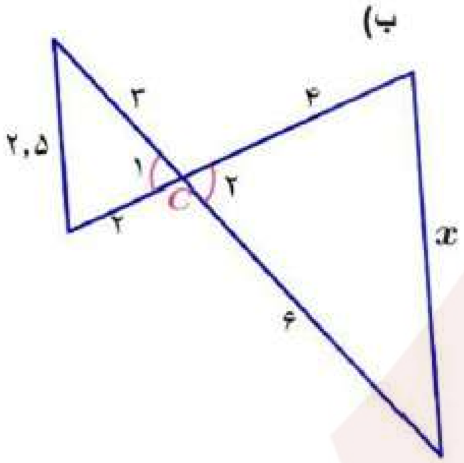
$(AC)^2 = BC \times HC \Rightarrow (AC)^2 = 8\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \Rightarrow AC^2 = 48 \Rightarrow AC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

**۳۵** الف) چون $\frac{a۲}{a} = \frac{b۲}{b} = \frac{c۲}{c} = ۲$ پس سه ضلع متناسب هستند در نتیجه دو مثلث متشابه‌اند بنابراین زاویه‌های متناظر آن‌ها برابر است پس:



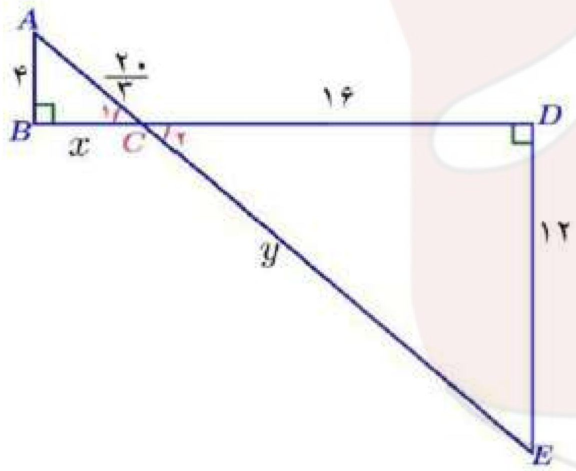

$$x + ۶۰° + ۲۰° = ۱۸۰° \Rightarrow x = ۱۸۰° - ۶۰° - ۲۰°$$
$$\Rightarrow x = ۱۰۰°$$

ب) چون $\frac{۶}{۳} = \frac{۴}{۲} = ۲$ و $\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$ پس بنا به حالت تناسب دو ضلع و برابر زاویه بین این دو ضلع این دو مثلث متشابه‌اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. پس داریم:




$$۲ = \frac{۶}{۳} = \frac{۴}{۲} = \frac{x}{۲/۵} \Rightarrow \frac{x}{۲/۵} = ۲ \Rightarrow x = ۵$$

پ) چون $\hat{B} = \hat{D} = ۹۰°$ و $\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$ پس بنا به حالت برابری دو زاویه این دو مثلث متشابه‌اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. لذا داریم:




$$\frac{۱۶}{x} = \frac{۱۲}{۴} = \frac{y}{\frac{۲۰}{۳}}$$

$$\begin{cases} \frac{۱۶}{x} = \frac{۱۲}{۴} \Rightarrow x = \frac{۴\times۱۶}{۱۲} \Rightarrow x = \frac{۱۶}{۳} \\ \frac{y}{\frac{۲۰}{۳}} = \frac{۱۲}{۴} \Rightarrow y = \frac{\frac{۲۰}{۳}\times۱۲}{۴} \Rightarrow y = \frac{۲۰\times۱۲}{۳\times۴} \\ \Rightarrow y = ۲۰ \end{cases}$$

**۳۶**
$$f(x) = \frac{x + ۹}{x^۲ - ۷x + ۱۰}$$

**۳۷**
۱) $x - ۵ = ۰ \Rightarrow x = ۵ \Rightarrow D_f = R - \{۵\}$

۲) $x - ۴ \geqslant ۰ \Rightarrow x \geqslant ۴ \Rightarrow D_g = [۴, +\infty)$

۳۸

$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0 \xrightarrow{\times} \left.\begin{array}{l} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{2\times} 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-4 \\ b-1=-6 \Rightarrow b=-5 \end{array}\right.$

۳۹

الف) $D_f: x^3 - 25x \ge 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x=5 \\ x=-5 \end{array}\right.$

$p = x^3 - 25x$

| x | $-\infty$ | $-5$ | | $0$ | | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | - | | - | | + | | + |
| $x^2 - 25$ | + | | - | | - | | + |
| p | - | | + | | - | | + |
| $p \ge 0$ | | ج | ج | ج | | ج | ج |

$D_f = [-5, 0] \cup [5, +\infty)$

ب) $D_g: \left\{\begin{array}{l} x^2 - 1 \ne 0 \Rightarrow x \ne \pm 1 \\ x^2 - 3x \ne 0 \Rightarrow x \ne 0\,,\,3 \end{array}\right. \Rightarrow D_g = R - \{0, 3, \pm 1\}$

۴۰

الف) دامنه‌ی این دو تابع با هم برابر است. $D_f = D_g = R - \{0\}$

پس از ساده کردن تابع g مشاهده می‌کنیم که ضابطه‌ی این دو تابع نیز با هم برابر است:

$\left\{\begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow g(x) = \frac{x}{x} = 1 \\ x < 0 \Rightarrow g(x) = \frac{-x}{x} = -1 \end{array}\right. \Rightarrow g(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{array}\right.$

ب) می‌دانیم دامنه‌ی این دو تابع عبارت است از: $D_f = R,\ \ D_g = R - \{-2\}$

با وجود این‌که اگر $g(x)$ را ساده کنیم ضابطه‌ی آن با ضابطه‌ی $f(x)$ برابر می‌شود اما چون دامنه‌ها برابر نیستند نمی‌توانیم بگوییم که دو تابع برابر هستند.

$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = x - 2$

۴۱

$2 \le x < \frac{5}{2} \Rightarrow 3 \le 2x - 1 < 4 \Rightarrow [2x - 1] = 3$

۴۲

$4x - 1 \ne 0 \Rightarrow x \ne \frac{1}{4}$

$3x - 1 \ne \frac{1}{4} \Rightarrow -3x \ne -\frac{3}{4} \Rightarrow x \ne \frac{1}{4} \Rightarrow D_{f(3x-1)} = R - \left\{\frac{1}{4}\right\}$

۴۳

الف) $a = 4$ و $b = 2$

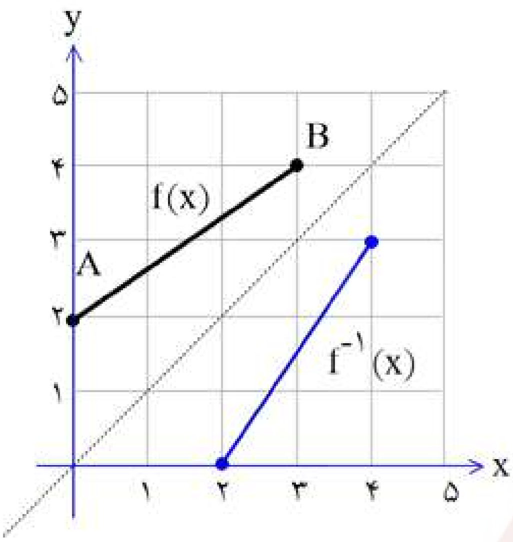
ب) ۶

**۴۴** تابع f از نقاط $A(0,2)$ و $B(3,4)$ می‌گذرد. بنابراین برای تابع وارون داریم:

$$f \ni (0,2) \Rightarrow f^{-1} \ni (2,0)$$

$$f \ni (3,4) \Rightarrow f^{-1} \ni (4,3)$$

بنابراین نمودار $f^{-1}(x)$ به صورت زیر است.




**۴۵**

$$\begin{matrix} A(3,0) \\ B(0,-2) \end{matrix} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-0}{0-3} = \frac{2}{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{3}(x - 0)$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x - 2$$

$$f(-1) = \frac{2}{3}(-1) - 2 = -\frac{2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$$

$$f^{-1}(1) = a \Rightarrow f(a) = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}a - 2 = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}a = 3 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$$

$$\frac{f^{-1}(1)+1}{f(-1)-1} = \frac{\frac{9}{2}+1}{\left(-\frac{8}{3}\right)-1} = \frac{\frac{11}{2}}{-\frac{11}{3}} = -\frac{3}{2}$$

**۴۶**

$$D_f = R - \{9\} \Rightarrow f(x) = \frac{(x-4)(x-9)}{(x-9)} = x - 4$$

تابع در $(9,5)$ تعریف نشده است. بنابراین وارون آن در $(5,9)$ تعریف نشده است.

$$y = x - 4 \Rightarrow x = y + 4 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = x + 4$$

$$D_{f^{-1}} = R - \{5\}$$

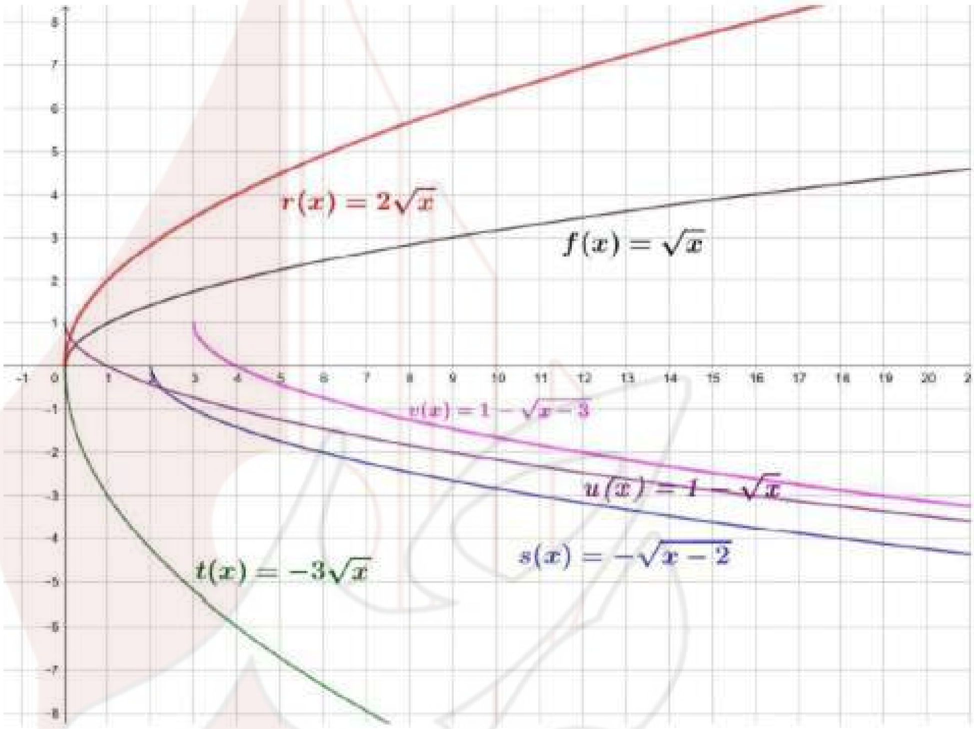
**۴۷** الف) با توجه به این‌که $r(x) = 2f(x)$ کافی است عرض‌های هر نقطه از نمودار f را دو برابر کنیم.

ب) با توجه به این‌که $s(x) = -f(x-2)$ کافی است ابتدا نمودار f را به اندازه‌ی ۲ واحد روی محور طول‌ها به سمت مثبت‌ها انتقال دهیم سپس آن‌را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.

پ) با توجه به این‌که $t(x) = -3f(x)$ کافی است ابتدا عرض‌های هر نقطه از نمودار f را سه برابر کنیم سپس نمودار را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم.

ت) با توجه به این‌که $u(x) = -f(x) + 1$ کافی است ابتدا نمودار f را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم سپس نمودار جدید را به اندازه‌ی ۱ واحد روی محور عرض‌ها به سمت مثبت‌ها انتقال دهیم.

ث) با توجه به این‌که $v(x) = -f(x-3) + 1$ کافی است ابتدا نمودار f را به اندازه‌ی ۳ واحد روی محور طول‌ها به سمت مثبت‌ها انتقال دهیم سپس نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم بعد نمودار جدید را به اندازه‌ی ۱ واحد روی محور عرض‌ها به سمت مثبت‌ها انتقال دهیم.



**۴۸** الف)

| تابع | ضابطه | دامنه |
|---|---|---|
| $f+g$ | $(f+g)(x)=\|x\|+x$ | $D_{f+g}=D_f \cap D_g = R \cap R = R$ |
| $f-g$ | $(f-g)(x)=\|x\|-x$ | $D_{f-g}=D_f \cap D_f = R \cap R = R$ |
| $f.g$ | $(f.g)(x)=\|x\|x = x\|x\|$ | $D_{f.g}=D_f \cap D_g = R \cap R = R$ |
| $\frac{f}{g}$ | $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\|x\|}{x}$ | $D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g - \{x \| g(x)=۰\} = R-\{۰\}$ |

ب)

| تابع | ضابطه | دامنه |
|---|---|---|
| $f+g$ | $(f+g)(x)=x^۲-۴+x+۲$ <br> $=x^۲+x-۲$ | $D_{f+g}=R \cap R = R$ |
| $f-g$ | $(f-g)(x)=x^۲-۴-(x+۲)$ <br> $=x^۲-x-۶$ | $D_{f-g}=R \cap R = R$ |
| $f.g$ | $(f.g)(x)=(x^۲-۴)(x+۲)$ <br> $=x^۳+۲x^۲-۴x-۸$ | $D_{f.g}=R \cap R = R$ |
| $\frac{f}{g}$ | $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^۲-۴}{(x+۲)}=x-۲$ | $D_{\frac{f}{g}}=R-\{-۲\}$ |

پ)

| تابع | ضابطه | دامنه |
|---|---|---|
| $f+g$ | $(f+g)(x)=\sqrt{x}+(-\sqrt{x})=۰$ | $D_{f+g}=[۰,+\infty)$ |
| $f-g$ | $(f-g)(x)=\sqrt{x}-(-\sqrt{x})=۲\sqrt{x}$ | $D_{f-g}=[۰,+\infty)$ |
| $f.g$ | $(f.g)(x)=\sqrt{x}(-\sqrt{x})=-x$ | $D_{f.g}=[۰,+\infty)$ |
| $\frac{f}{g}$ | $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}}=-۱$ | $D_{\frac{f}{g}}=[۰,+\infty)-\{۰\}=(۰,+\infty)$ |

ت)

| تابع | ضابطه | دامنه |
|---|---|---|
| $f+g$ | $(f+g)(x)=\frac{x^۳+۸x^۲+۶x-۵۲}{x+۲}$ | $D_{f+g}=R-\{-۵\} \cap R = R-\{-۵\}$ |
| $f-g$ | $(f-g)(x)=\frac{-x^۳-۸x-۴x+۴۸}{x+۵}$ | $D_{f-g}=R-\{-۵\} \cap R = R-\{-۵\}$ |
| $f.g$ | $(f.g)(x)=(x-۲)^۲$ | $D_{f.g}=R-\{-۵\} \cap R = R-\{-۵\}$ |

| $\frac{f}{g}$ | $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{۱}{(x+۵)^۲}$ | $D_{\frac{f}{g}} = (R - \{-۵\} \cap R) - \{۲\} = R - \{-۵, ۲\}$ |
|---|---|---|

**۴۹** الف) $۳f(۱) - ۳g(۱) = ۳(۲) - ۳(-۳) = ۶ + ۹ = ۱۵$

ب) $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = x \geq -۳ \cap x \neq ۲ = \left[-۳, +\infty\right) - \{۲\}$

$(f+g)(x) = \frac{x-۲}{x+۵} + x^۲ + ۳x - ۱۰ = \frac{x - ۲ + x^۳ + ۳x^۲ - ۱۰x + ۵x^۲ + ۱۵x - ۵۰}{x+۵}$

$= \frac{x^۳ + ۸x^۲ + ۶x - ۵۲}{x+۵}$

**۵۰** $f + g = \{(-۳, ۵), (۰, ۴), (۶, -۴)\}$

$f - g = \{(۳, ۵), (۸, ۰), (۲۰, ۴)\}$

$(f-g)(x) = \frac{x-۲}{x+۵} - (x^۲ + ۳x - ۱۰) = \frac{x - ۲ - x^۳ - ۳x^۲ + ۱۰x - ۵x^۲ - ۱۵x + ۵۰}{x+۵}$

$\left\{\left(\frac{-۵}{۳}, ۶\right), \left(\frac{-۱۳}{۲}, ۴\right)\right\} = \frac{f}{g}$

$(f+g)(x) = \frac{x^۳ + ۸x^۲ + ۶x - ۵۲}{x+۵} \Rightarrow$

$(f.g)(x) = \left(\frac{x-۲}{x+۵}\right)(x^۲ + ۳x - ۱۰) = \frac{(x-۲)}{(x+۵)}(x+۵)(x-۲) \Rightarrow (f+g)(x) = (x-۲)^۲$

$(f.g)(x) = \left(\frac{x-۲}{x+۵}\right) \div (x^۲ + ۳x - ۱۰) = \frac{(x-۲)}{(x+۵)} \times \frac{۱}{(x+۵)(x-۲)} \Rightarrow (f+g)(x) = \frac{۱}{(x+۵)^۲}$

ث)

| تابع | ضابطه | دامنه |
|---|---|---|
| $f+g$ | $(f+g)(x) = \{(۲, ۹), (۳, ۴), (۰, ۱)\}$ | $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{۰, ۲, ۳\}$ |
| $f-g$ | $(f-g)(x) = \{(۲, ۱), (۳, ۴), (۰, -۵)\}$ | $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{۰, ۲, ۳\}$ |
| $f.g$ | $(f.g)(x) = \{(۲, ۲۰), (۳, ۰), (۰, -۶)\}$ | $D_{f.g} = D_f \cap D_g = \{۰, ۲, ۳\}$ |
| $\frac{f}{g}$ | $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left\{\left(۲, \frac{۵}{۴}\right), \left(۰, \frac{-۳}{۲}\right)\right\}$ | $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\} = \{۰, ۲\}$ |

$\begin{cases} f(۲) = ۵ \\ g(۲) = ۴ \end{cases} \Rightarrow (f+g)(۲) = ۵ + ۴ = ۹ \qquad \begin{cases} f(۲) = ۵ \\ g(۲) = ۴ \end{cases} \Rightarrow (f-g)(۲) = ۵ - ۴ = ۱$

$\begin{cases} f(۲) = ۵ \\ g(۲) = ۴ \end{cases} \Rightarrow (f.g)(۲) = ۵ \times ۴ = ۲۰ \qquad \begin{cases} f(۲) = ۵ \\ g(۲) = ۴ \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(۲) = \frac{۵}{۴}$

$\begin{cases} f(۳) = ۴ \\ g(۳) = ۰ \end{cases} \Rightarrow (f+g)(۳) = ۴ + ۰ = ۴ \qquad \begin{cases} f(۳) = ۴ \\ g(۳) = ۰ \end{cases} \Rightarrow (f-g)(۳) = ۴ - ۰ = ۴$

$\begin{cases} f(۳) = ۴ \\ g(۳) = ۰ \end{cases} \Rightarrow (f.g)(۳) = ۴ \times ۰ = ۰$

$\begin{cases} f(۰) = -۲ \\ g(۰) = ۳ \end{cases} \Rightarrow (f+g)(۰) = -۲ + ۳ = ۱ \qquad \begin{cases} f(۰) = -۲ \\ g(۰) = ۳ \end{cases} \Rightarrow (f-g)(۰) = -۲ - ۳ = -۵$

$\begin{cases} f(۰) = -۲ \\ g(۰) = ۳ \end{cases} \Rightarrow (f.g)(۰) = -۲ \times ۳ = -۶ \qquad \begin{cases} f(۰) = -۲ \\ g(۰) = ۳ \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(۰) = \frac{-۲}{۳}$



٪حروفچینی ریاضی: ۸۰

**۵۱** الف) همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم ۱ رادیان تقریباً برابر با ۵۷/۳ درجه است. بنابراین با توجه به این‌که مثلث متساوی‌الساقین است، بنابراین اندازه‌ی هریک از دو زاویه مجاور به ساق را می‌توان به دست آورد:

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180° - 57.3°}{2} = 61.35°$$

همچنین می‌دانیم در هر مثلث ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر است پس طول قاعده کوچک‌تر از طول ساق‌ها خواهد بود. پس عبارت فوق درست است.

ب) این عبارت درست است زیرا: $\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow l = \alpha r \Rightarrow l = 1 \times \pi = \pi \simeq 3.14\,cm$

این عبارت نادرست است زیرا:

راه اول: زیرا $\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$ بنابراین انتهای کمان این زاویه در ربع سوم قرار دارد، زیرا بیش‌تر از $\pi$ رادیان است.

راه دوم: انتهای کمان زاویه ۲۱۶ درجه در ربع سوم است.

$$\frac{6\pi}{5}\ \text{رادیان} \xrightarrow{\pi\ \text{رادیان} = 180°} \frac{1080°}{5} = 216°$$

ت) این عبارت نادرست است زیرا:

راه اول: می‌دانیم که مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث °۱۸۰ است پس:

$$\frac{2\pi}{3}\ \text{رادیان} \xrightarrow{\pi\ \text{رادیان} = 180°} \frac{360°}{3} = 120° \qquad \frac{7\pi}{36}\ \text{رادیان} \xrightarrow{\pi\ \text{رادیان} = 180°} \frac{1260°}{36} = 35°$$

$$\frac{\pi}{9}\ \text{رادیان} \xrightarrow{\pi\ \text{رادیان} = 180°} \frac{180°}{9} = 20°$$

$$120° + 20° + 35° = 175° < 180°$$

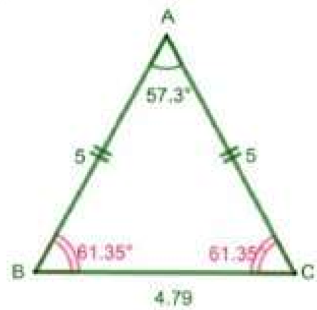
راه دوم: می‌دانیم مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث °۱۸۰ است پس:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} \Rightarrow \frac{35\pi}{36}\ \text{رادیان} \xrightarrow{\pi\ \text{رادیان} = 180°}$$

$$\frac{6300°}{36} = 175° < 180°$$

راه سوم: می‌دانیم مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث °۱۸۰ یا همان $\pi$ رادیان است پس:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} < \pi$$



**۵۲** الف)

$$D = 150^\circ \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{150}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow 180R = 150\pi \Rightarrow R = \frac{150\pi}{180} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{6}$$

ب)

شعاع $r = 30\,cm \quad \theta = \frac{5\pi}{6} \quad L = ?$

$$L = r\theta = 30 \times \frac{5\pi}{6} = 25\pi = 78/5$$

**۵۳** در قرقره بزرگ‌تر داریم:

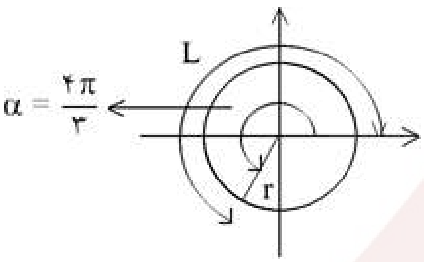
$$\theta = \frac{\overset{\frown}{PP'}}{r} \Rightarrow \overset{\frown}{PP'} = \frac{\pi}{3} \times 8 = \frac{8\pi}{3}\,cm$$

چون دو قرقره با یک تسمه به هم متصل شده‌اند پس قرقره کوچک‌تر نیز $\frac{8\pi}{3}\,cm$ حرکت می‌کند بنابراین:

$$\theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \theta = \frac{\frac{8\pi}{3}}{3} = \frac{8\pi}{9}\,rad$$

**۵۴** در رابطه‌ی $\alpha = \frac{L}{r}$، مقادیر رادیان $\alpha = \frac{\pi}{3}$ و $L = \frac{4\pi}{3}$ را جای‌گذاری می‌کنیم تا r به دست آید:

$$\alpha = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{r}$$
$$\Rightarrow r = 4$$




در نتیجه، قطر دایره برابر $d = 2r = 8$ است.

**۵۵**

الف) $Sin\,840^\circ = Sin\,60^\circ$

$Sin\,840^\circ = Sin(2 \times 360^\circ + 120^\circ) = Sin\,120^\circ = Sin(180^\circ - 60^\circ) = Sin\,60^\circ$

ب) $Cos(-324^\circ) = Cos\,36^\circ$

$Cos(-324^\circ) = Cos\,324^\circ = Cos(360^\circ - 36^\circ) = Cos\,36^\circ$

پ) $tg(-1000^\circ) = tg\,80^\circ$

$tg(-1000^\circ) = -tg\,1000^\circ = -tg(3 \times 360^\circ - 80^\circ) = -(-tg\,80^\circ) = tg\,80^\circ$

ت) $Sin\,875^\circ = Sin\,155^\circ$

$Sin\,875^\circ = Sin(2 \times 360^\circ + 155^\circ) = Sin\,155^\circ$

راه‌حل دیگر این است که نشان دهیم این زوایا هم‌انتها هستند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود اختلاف هر دو زاویه‌ی ارائه شده در هر قسمت مضربی از $2\pi$ رادیان یا $360^\circ$ است:

$$875^\circ - 155^\circ = 720^\circ = 2 \times 360^\circ$$

۵۶

الف) $tg135° + Cotg120° = tg(180° - 45°) + Cotg(180° - 60°) = -tg45° + (-Cotg60°)$
$= -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

ب) $Cos(-210°) + Cotg(240°) = Cos210° + Cotg(240°)$
$= Cos(180° + 30°) + Cotg(180° + 60°) = -Cos30° + Cotg60° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$

پ) $Sin630° + tg(-540°) = Sin630° - tg540° = Sin(2 \times 360° - 90°) - tg(360° + 180°)$
$= -Sin90° - tg180° = -1 + 0 = -1$

ت) $Cos(-720°) + Cotg(-600°) + tg720° - tg(-600°) =$
$Cos720° - Cotg600° + tg720° + tg600° =$
$Cos(2 \times 360° + 0) - Cotg(2 \times 360° - 120°) + tg(2 \times 360° + 0) + tg(2 \times 360° - 120°) =$
$Cos0° - (-Cotg120°) + tg0° - tg120° =$
$Cos0° + Cotg(180° - 60°) + tg0° - tg(180° - 60°) =$
$Cos0° - Cotg60° + tg0° + tg60° = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + \sqrt{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}$

ث) $Sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - Cos\left(\frac{23\pi}{3}\right) = Sin\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) - Cos\left(8\pi - \frac{\pi}{3}\right)$
$= Sin\frac{\pi}{3} - Cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

ج) $\dfrac{Sin\frac{3\pi}{4} - Cos\frac{5\pi}{6}}{Sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + tg\left(\frac{-4\pi}{3}\right)} = \dfrac{Sin\frac{3\pi}{4} - Cos\frac{5\pi}{6}}{Sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + tg\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} = \dfrac{Sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - Cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{-Sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - tg\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}$
$= \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}} = \dfrac{-4 - \sqrt{6}}{10}$

۵۷

$$\frac{Sin(180° - 20°) - 2Cos(180° + 20°)}{Cos(270° - 20°) + Sin(270° + 20°)} = \frac{Sin20° + 2Cos20°}{-Sin20° + Cos20°} \xrightarrow[\div Cos20°]{\text{صورت و مخرج}}$$

(۰/۲۵) (۰/۷۵)

$$\frac{tg20° + 2}{-tg20° + 1} = \frac{2/4}{0/6} = 4$$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵)

**۵۸**

$$\sin\left(\frac{۷\pi}{۳}\right) = \sin\left(۲\pi + \frac{\pi}{۳}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\left(\frac{۵\pi}{۴}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{۴}\right) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{۳}\right) = -\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{۳}\right) = -\sqrt{۳}$$

$$\cos\left(\frac{۷\pi}{۶}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{۶}\right) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin\left(\frac{۷\pi}{۳}\right)\cos\left(\frac{۵\pi}{۴}\right) - \mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{۳}\right)\cos\left(\frac{۷\pi}{۶}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) - (-\sqrt{۳})\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{۶}}{۴} - \frac{۳}{۲}$$

**۵۹**

الف) $\sin\left(\frac{۹۹\pi}{۴}\right) = \sin\left(\frac{۱۰۰\pi - \pi}{۴}\right) = \sin\left(۲۵\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

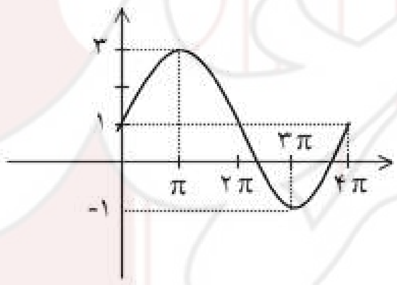
ب) $\mathrm{tg}\left(-\frac{۱۳\pi}{۶}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{-۱۲\pi - \pi}{۶}\right) = \mathrm{tg}\left(-۲\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

پ) $\cos\left(\frac{۲۳\pi}{۳}\right) = \cos\left(\frac{۲۴\pi - \pi}{۳}\right) = \cos\left(۸\pi - \frac{\pi}{۳}\right) = \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$

ت) $\mathrm{Cotg}\left(-\frac{۱۰\pi}{۳}\right) = \mathrm{Cotg}\left(\frac{-۹\pi - \pi}{۳}\right) = \mathrm{Cotg}\left(-۳\pi - \frac{\pi}{۳}\right) = -\mathrm{Cotg}\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

**۶۰**

| $\frac{x}{۲}$ | ۰ | $\frac{\pi}{۲}$ | $\pi$ | $\frac{۳\pi}{۲}$ | $۲\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| x | ۰ | $\pi$ | $۲\pi$ | $۳\pi$ | $۴\pi$ |
| y | ۱ | ۳ | ۱ | -۱ | ۱ |

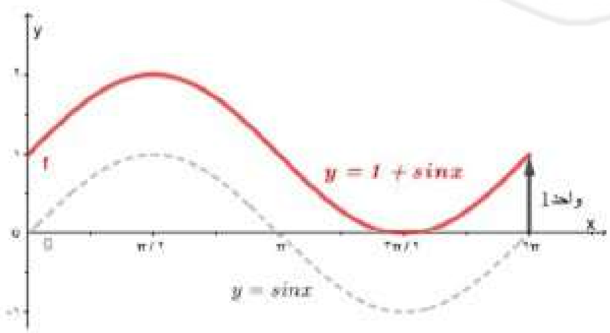


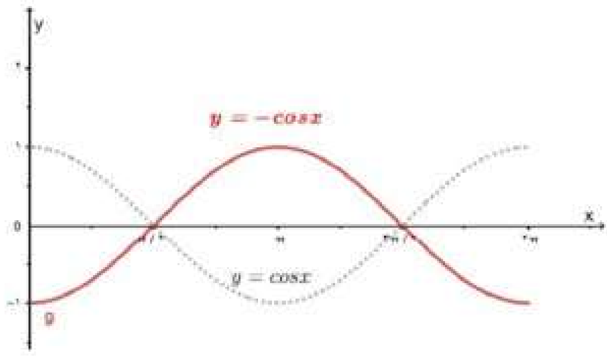

**۶۱** الف) درست است. در نمودار تابع سینوس مقادیر y باید نصف شوند.

ب) درست است. نمودار تابع کسینوس را به اندازه نصف واحد به موازات محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.

پ) باید به اندازه یک واحد به موازات محور y ها به سمت بالا انتقال یابد.

ت) درست است.

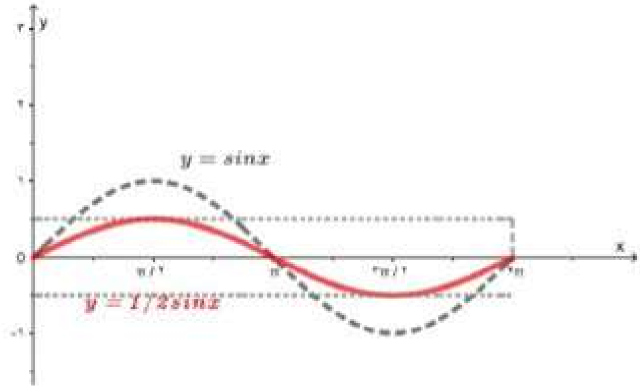


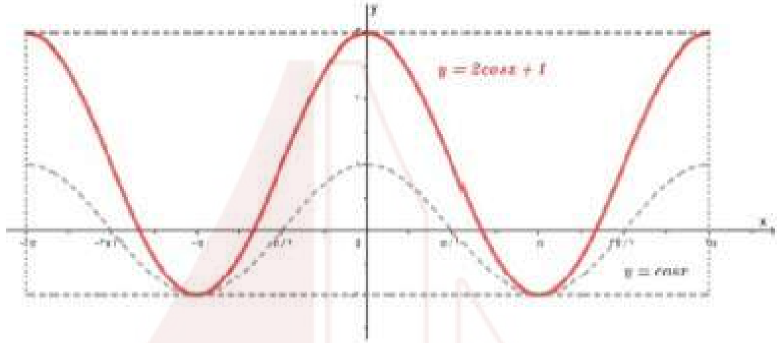



٪حروفچینی ریاضی: ۸۰

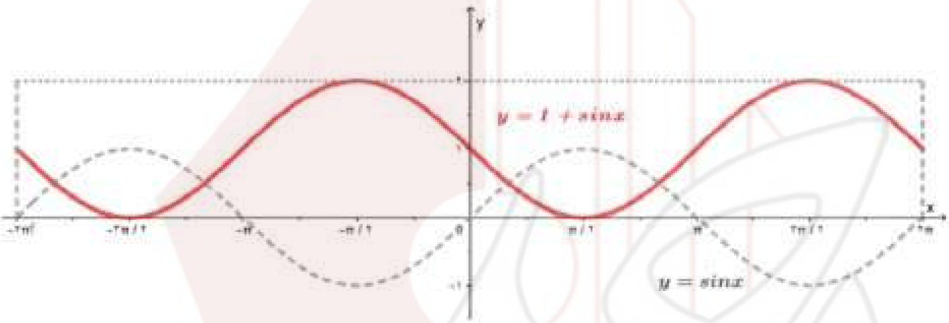
**۶۲** (۱


y = sinx
y = 1/2sinx

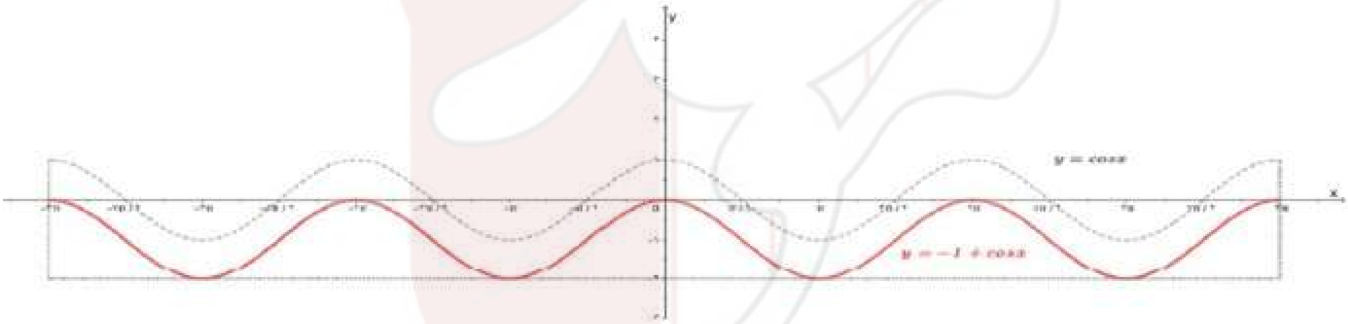
(۲


y = 2cosx + 1
y = cosx

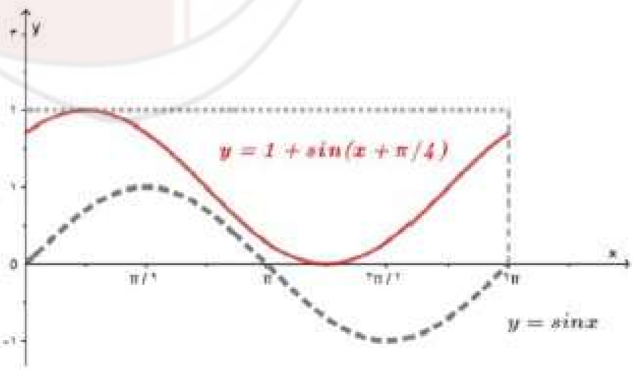
(۳


y = 1 + sinx
y = sinx

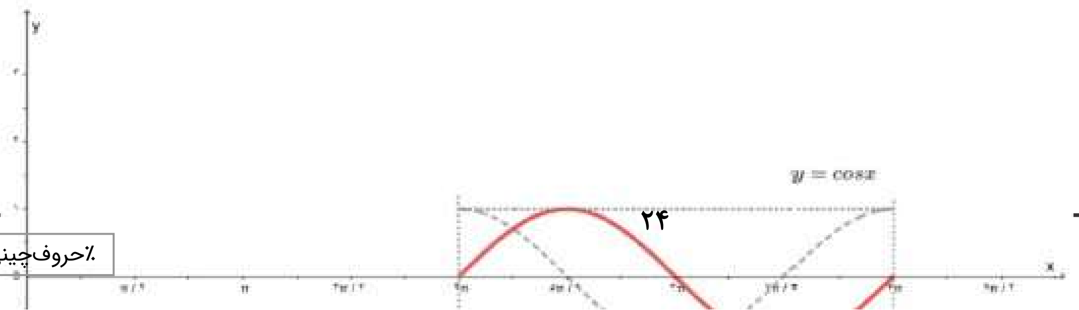
(۴


y = cosx
y = −1 + cosx

(۵


y = 1 + sin(x + π/4)
y = sinx

(۶


y = cosx


۶۳ $۱+\left(\frac{\pi ۷}{۶}\right)Cos۳ = \left(\frac{\pi ۷}{۶}\right)f \Rightarrow ۱+(x)Cos۳ = (x)f \Rightarrow ۱+\left(x+\frac{\pi ۵}{۲}\right)Sin۳ = (x)f$

$۱+\frac{\overline{۳}\sqrt{۳}}{۲}- = ۱+\frac{\overline{۳}\sqrt{}}{۲}x۳- = ۱+\left(\frac{\pi}{۶}\right)Cos۳- = ۱+\left(\frac{\pi}{۶}+\pi\right)Cos۳ = \left(\frac{\pi ۷}{۶}\right)f \Rightarrow$

۶۴ $\frac{۳}{۲} = b \Rightarrow \left(\frac{\overline{۳}\sqrt{}}{۲}\right)\overline{۳}\sqrt{۲} = ۲b \Rightarrow ۳+\frac{\pi}{۶}Cos\overline{۳}\sqrt{۲} = ۳+۲b$

۶۵ از آن‌جا که $\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)Cos = xSin$، بنابراین تابع را به صورت $y = a + xSinb$ می‌نویسیم و در $y = ۴$ تابع در بالاترین نقطه قرار دارد. بنابراین x آن نقطه $\frac{\pi}{۲}$ است. در نتیجه تابع از دو نقطه A و B می‌گذرد.

$(۱)\ ۴ = b + a \Rightarrow ۴ = \left(\frac{\pi}{۲}\right)Sinb + a \Rightarrow \left.\begin{matrix}\frac{\pi}{۲}\\ ۴\end{matrix}\right| A$

$(۲)\ ۱ = \frac{b}{۲} - a \Rightarrow ۱ = \left(\frac{\pi}{۶}-\right)Sinb + a \Rightarrow \left.\begin{matrix}\frac{\pi}{۶}-\\ ۱\end{matrix}\right| B$

$۲ = a \Rightarrow ۲ = b \Rightarrow ۳ = b\frac{۳}{۲} \Rightarrow \left.\begin{matrix}۴ = b + a\\ ۱ = \frac{b}{۲} - a\end{matrix}\right\}$

$\left(\frac{\pi}{۳} - \pi۶\right)Sin۲ + ۲ = y \Rightarrow \left(\frac{\pi ۱۷}{۳}\right)Sin۲ + ۲ = y \xrightarrow{\frac{\pi ۱۷}{۳} = x} xSin۲ + ۲ = y$

$\overline{۳}\sqrt{} - ۲ = y \Rightarrow \left(\frac{\overline{۳}\sqrt{}}{۲}-\right)۲ + ۲ =$

۶۶ الف) $\frac{۸}{۳}- = n \Rightarrow ۱۰- = ۲ - n۳ \Rightarrow {}^{۱۰-}۲ = \frac{۱}{{}^{۲}۳۲} = {}^{۲-n۳}۲$

ب) ${}^{۳+y۳}۳ = {}^{۶-y۶}۳ \Rightarrow {}^{۱+y}۲۷ = {}^{۳-y۳}۹$

$۳ = y \Rightarrow ۹ = y۳$

پ) ${}^{۱۸-}۲ = {}^{۴+x۶}۲ \Rightarrow \frac{۱}{{}^{۳}۶۴} = {}^{۲+x۳}۴$

$\frac{۱۱}{۳}- = x \Rightarrow ۲۲- = x۶$

ت) $۶ = x, ۰ = x \Rightarrow ۰ = x۲ - x۴ - {}^{۲}x \Rightarrow {}^{x۴-{}^{۲}x}۳ = {}^{x۲}۳ = {}^{x۴-{}^{۲}x}۳ = {}^{x}۹$

ث) $۳- = x \Rightarrow ۲- = ۱ + x \Rightarrow {}^{۲-}\left(\frac{۳}{۵}\right) = {}^{۱+x}\left(\frac{۳}{۵}\right) \Rightarrow \frac{۲۵}{۹} = {}^{۱+x}\left(\frac{۳}{۵}\right)$

۶۷ الف) $۲۷ = {}^{۳}۳ = (۳)f$

ب) $۱۶ = {}^{۱-}\left(\frac{۱}{۱۶}\right) = (۱-)g$





پ) $\frac{}{۱۰۰} = {}^{۲-}۱۰ = (۲-)h$

۶۸ الف) $\frac{۱-}{۵} = x \Rightarrow ۴ - x۱۲ = x۲ + ۶- \Rightarrow {}^{۴ - x۱۲}۵ = {}^{x۲+۶-}۵$

ب) $\frac{۱-}{۶} \leq p \Rightarrow ۶ - p۱۲ \geq ۸- \Rightarrow {}^{۶ - p۱۲}۲ \geq {}^{۸-}۲$

۶۹ الف) $۵ < n \Rightarrow ۱۰ < n۲ \Rightarrow ۴ < ۶ - n۲ \Rightarrow {}^{۴}۲ < {}^{۶ - n۲}۲$

ب) $۱- > x \Rightarrow ۲ < x۲- \Rightarrow x + ۷ < x - ۵ \Rightarrow {}^{x+۷}\left(\frac{۱}{۷}\right) > {}^{x-۵}\left(\frac{۱}{۷}\right)$

۷۰ $۱۲ = y۲ + x۲- \Rightarrow {}^{۱۲}۵ = {}^{x۹ - y۳}۵ \, x^{y - x۷}۵ \Rightarrow {}^{۳}({}^{۴}۵) = {}^{x۳ - y}({}^{۳}۵) x^{y - x۷}۵$

$\underset{۲}{(x۵ - y)} \text{ Log } + \underset{۲}{۴} \text{ Log } = \underset{۲}{(y + x)} \text{ Log } \Rightarrow \underset{۲}{(x۵ - y)} \text{ Log } + \underset{۲}{۲} \text{ Log } ۲ = \underset{۲}{(y + x)} \text{ Log}$

$x۷ = y \Rightarrow y۳ = x۲۱ \Rightarrow x۲۰ - y۴ = y + x \Rightarrow \underset{۲}{(x۲۰ - y۴)} \text{ Log } = \underset{۲}{(y + x)} \text{ Log } \Rightarrow$

$۷ = y \Rightarrow ۱ = x \Rightarrow ۱۲ = x۱۲ \Rightarrow ۱۲ = (x۷)۲ + x۲ - \xrightarrow{x۷ = y}$

۷۱ $۲ = y - x۳ \Rightarrow {}^{۲}۳ = {}^{y۲ - x۲ + y + x}۳ \Rightarrow {}^{۲}۳ = {}^{y۲ - x۲}۳ \, x^{y + x}۳ \Rightarrow {}^{۲}۳ = {}^{y - x}({}^{۲}۳) x^{y + x}۳$

$۲ = x۲ - x۳ \xrightarrow{x۲ = y} x۲ = y \Rightarrow y۲ = y + x۲ \Rightarrow y۲ \text{ Log } = (y + x۲) \text{ Log}$

$۴ = y \Rightarrow ۲ = x \Rightarrow$

۷۲ الف) $۰ = (۱ + p)(۲ - p) \Rightarrow ۰ = ۲ - p - {}^{۲}p \Rightarrow p = ۲ - {}^{۲}p$

$(\infty+, \overline{۲}\sqrt{}) = D \Rightarrow$ ق ق غ $۱- = p$, ق ق $۲ = p$

ب) $\overline{۶}\sqrt{} = x \Rightarrow ۶ = {}^{۲}x \Rightarrow ۵ = ۱ - {}^{۲}x \Rightarrow ۵ = (۱ - x)(۱ + x)$

پ) $۵ = a \Rightarrow ۱۲۵ = {}^{۳}a \Rightarrow ۲۵ = \frac{{}^{۳}a}{۵} \Rightarrow \underset{۴}{۲۵} \text{ Log } = \underset{۴}{\frac{{}^{۳}a}{۵}} \text{ Log } \Rightarrow \underset{۴}{۲۵} \text{ Log } = \underset{۴}{۵} \text{ Log } - \underset{۴}{{}^{۳}a} \text{ Log}$

ت) هر دو قابل قبولند $D \ni ۱۱\pm = x \Rightarrow ۱۲۱ = {}^{۲}x \Rightarrow ۱۰۰ = {}^{۲-}\left(\frac{۱}{۱۰}\right) = ۲۱ - {}^{۲}x$

۷۳ الف) $\frac{۲}{۵} = \underset{۷}{۷} \text{ Log } \frac{۲}{۵} = \underset{۷}{{}^{\frac{۲}{۵}}۷} \text{ Log } = \underset{۷}{{}^{\frac{۱}{۵}}۴۹} \text{ Log}$

ب) $\frac{۳}{۲} = ۱ \times \frac{۳}{۲} = \underset{۳}{{}^{\frac{۳}{۲}}۳} \text{ Log } = \underset{۳}{{}^{\frac{۱}{۲}}۲۷} \text{ Log}$

پ) $۳- = \underset{۵}{۵} \text{ Log } ۳- = \underset{۵}{{}^{۳}۵} \text{ Log } -$

ت) $\frac{۹}{۲} = \underset{۱۰}{{}^{\frac{۹}{۲}}۱۰} \text{ Log } = \underset{۱۰}{{}^{۳}\left({}^{\frac{۳}{۲}}۱۰\right)} \text{ Log}$



%حروفچینی ریاضی: ۸۰

**۷۴**

الف) $\log_c (bd)a = \log_c a + \log_c bd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$

ب) $a = c^m \Rightarrow m = \log_c a \qquad b = c^n \Rightarrow n = \log_c b \Rightarrow \log_b a = \log_{c^n} c^m = \frac{m}{n}\log_c c$

$$= \frac{m}{n} = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

پ) $\xrightarrow{\text{از طرفین لگاریتم در مبنای } a \text{ می گیریم}} \log_a a^{\log_a b} = \log_a b \Rightarrow \log_a b \cdot \log_a a$

$= \log_a b \times 1 = \log_a b$

ت) $\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \log_b a \times \log_a b = 1$

**۷۵**

(۱) $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ یا $x \leq -2$

(۲) $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$\xrightarrow{(1)\cap(2)} D_f = (2, +\infty)$

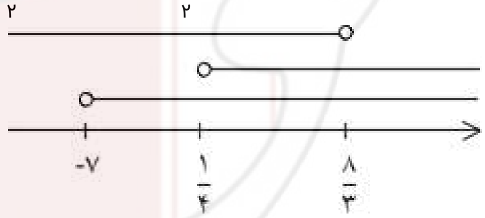

**۷۶**

(۱) $4x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{4}$

(۲) $x + 7 > 0 \Rightarrow x > -7$

(۳) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 7) < \log_{\frac{1}{2}}(4x - 1) \Rightarrow x + 7 > 4x - 1 \Rightarrow 8 > 3x \Rightarrow x < \frac{8}{3}$

$\xrightarrow{(3)\cap(2)\cap(1)}$ جواب $= \left(\frac{1}{4}, \frac{8}{3}\right)$




**۷۷**

ص ۱۰۴) $y = 2000000 \times (1 + 10\%)^1 = y = 2000000 \times (1/1) = 2200000$

**۷۸** الف)

| x | -۱ | ۰ | ۱ |
|---|---|---|---|
| y | $\frac{۱}{۲}$ | ۰ | -۱ |

ب)

| x | ۲ | ۳ |
|---|---|---|
| y | ۰ | -۱ |

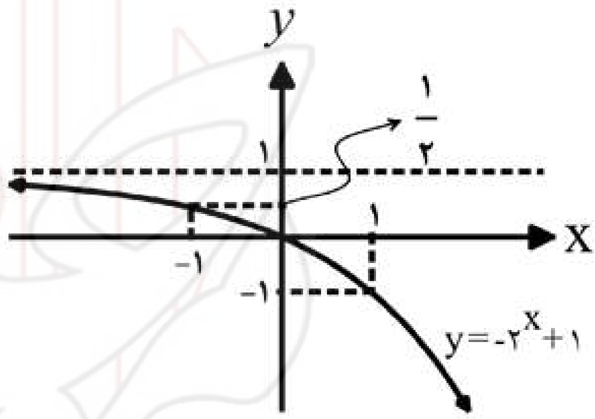
$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

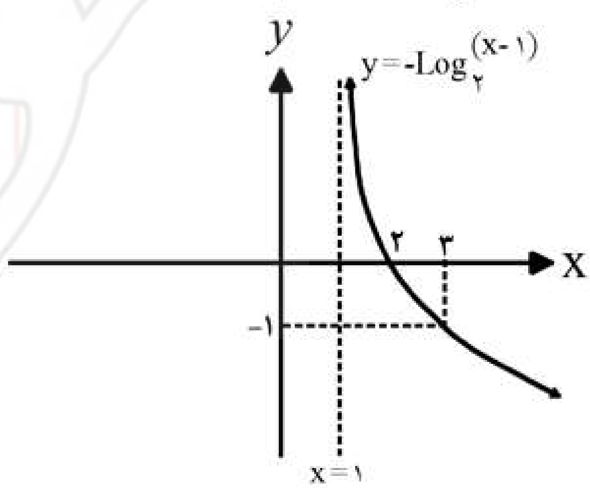
پ)

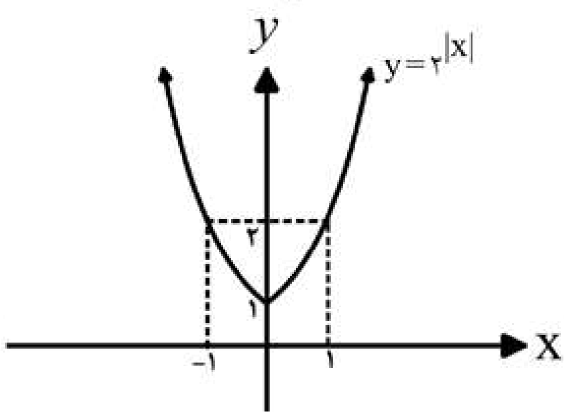
| x | -۱ | ۰ | ۱ |
|---|---|---|---|
| y | ۲ | ۱ | ۲ |

ت)

| x | ۱ | ۱۰ |
|---|---|---|
| y | ۰ | ۱ |

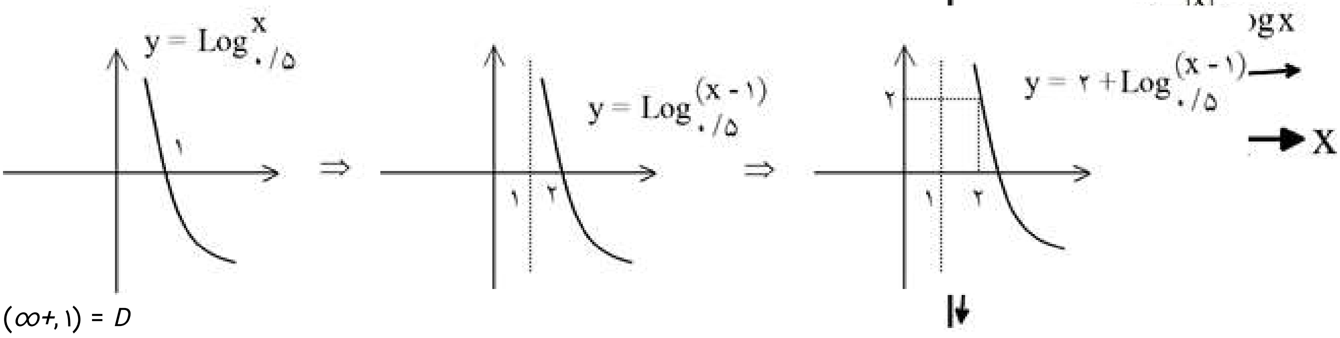


**۷۹**

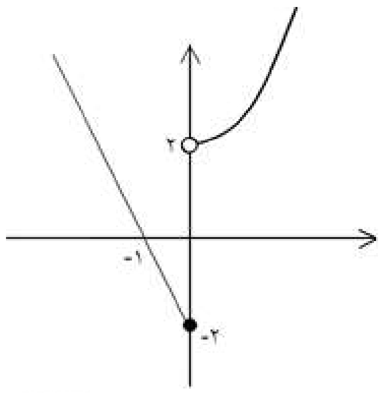
$y = ۲ + \log_{۰/۵}(x - ۱) \Rightarrow y = ۲ - \log_{۰/۵}(x - ۱)^{-۱}$




$D = (۱, +\infty)$

$R = R$

**۸۰**



$\lim_{x \to ۰^+} f(x) = (۰)^۲ + ۲ = ۲$ , $\lim_{x \to ۰^-} f(x) = -۲(۰) - ۲ = -۲ \Rightarrow \lim_{x \to ۰} f(x)$ وجود ندارد

**۸۱**

الف) $\lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۰$

ب) $\lim_{x \to ۲^-} f(x)$ وجود ندارد

پ) $\lim_{x \to ۲} f(x)$ وجود ندارد

ت) $f(۲) = \sqrt{۲ - ۲} = ۰$

**۸۲**

الف) نادرست — ب) درست

پ) نادرست — ت) نادرست

ث) نادرست — ج) درست

چ) درست — ح) درست

**۸۳**

$\lim_{x \to ۱} f(x)$ موجود است یعنی حد چپ و راست تابع در $x = ۱$ با هم برابر باشند.

$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} (a[x] + [x + ۱]) = a + ۲$

$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} (a[x] + [x + ۱]) = ۰ + ۱ = ۱$

$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} f(x) \Rightarrow a + ۲ = ۱ \Rightarrow a = -۱$

**۸۴**

الف) $\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{\sqrt{5x+1}} = \frac{6}{\sqrt{16}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

ب) $\lim_{x \to 3^-} (1 - [x]) = 1 - 2 = -1$

ج) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-5} = \frac{4}{-3}$

د) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Cos} x - \operatorname{Sin} x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\operatorname{Cos} x - \operatorname{Sin} x)(\operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x)}{\operatorname{Cos} x - \operatorname{Sin} x}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

**۸۵**

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) \Rightarrow 4 - 2b + 3a = -2 + b \Rightarrow 3b - 3a = 6 \Rightarrow b - a = 2$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 \Rightarrow \sqrt{2 \times 4 - 4a} = 2 \Rightarrow 8 - 4a = 4 \Rightarrow a = 1$

$b - a = 2 \Rightarrow b - 1 = 2 \Rightarrow b = 3$

**۸۶**

$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(2x-1)} = \frac{1}{5}$

۸۷

الف) $\lim\limits_{x\to 7} -3 = -3$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} (-x-7) = -(0)-7 = -7$

پ) $\lim\limits_{x\to -1} (3x^2-4x+5) = 3(-1)^2-4(-1)+5 = 3+4+5 = 12$

ت) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x}{x+3} = \frac{3}{3+3} = \frac{1}{2}$

ث) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{2x^2-x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x(2x-1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2(0)-1} = -1$

ج) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} (x^2-2x+4)$

$= (-2)^2-2(-2)+4 = 4+4+4 = 12$

چ) $\lim\limits_{x\to -2} [x]$ وجود ندارد

ح) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$

خ) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x+7} = \sqrt{2+7} = 3$

د) $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ وجود ندارد

ذ) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x+5} = \sqrt{2+5} = \sqrt{7}$

ر) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x-2}$ وجود ندارد

ز) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x-2}{[x]+1} = \frac{3-2}{3+1} = \frac{1}{4}$

ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{3}} \cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

ش) $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x}{[x]} = \frac{-2}{-2} = 1$

ص) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x+3}{x-4} = \frac{5}{-2}$





ض) $\lim ([x]+x)$ وجود ندارد

**۸۸**

الف) $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$ — ب) $\lim_{x\to -1} f(x)$ وجود ندارد

پ) $\lim_{x\to 3} g(x) = 5$ — ت) $\lim_{x\to 3}(f(x)+g(x)) = 2+5 = 7$

ث) $\lim_{x\to -1}(f(x)+g(x))$ وجود ندارد — ج) $\lim_{x\to 2}(2f(x)+5g(x))$ وجود ندارد

چ) $\lim_{x\to 0}(f(x))^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$ — ح) $\lim_{x\to 0}(g(x))^2$ وجود ندارد

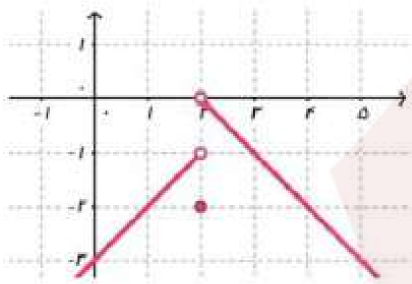
خ) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$ وجود ندارد — د) $\lim_{x\to 5}(f(x).g(x)) = 5\times 5 = 25$

**۸۹** تابع $f(x)$ در نقطه $x=0$ پیوسته است زیرا:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+2) = (0)^2+2 = 2\\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-2x+2) = -2(0)+2 = 2\\ f(0) = -2(0)+2 = 2\end{array}\right. \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

تابع $f(x)$ در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است زیرا: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

**۹۰**



$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll}x-3 & x<2\\ -2 & x=2\\ -x+2 & x>2\end{array}\right.$$

این تابع در تمام نقاط دامنه‌اش به غیر از نقطه‌ی $x=2$ پیوسته است زیرا:

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -2+2 = 0$ , $\lim_{x\to 2} f(x) = 2-3 = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)$ وجود ندارد

**۹۱**

$f(2) = 2a+2+1 = 2a+3$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{x+2b}{x^2-2} = \frac{2+2b}{2} = b+1$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2b+5$

$2a+3 = b+1 = 2b+5 \Rightarrow b+1 = 2b+5 \Rightarrow b = -4$

$2a+3 = 2b+5 \Rightarrow 2a+3 = -3 \Rightarrow a = -3$

**۹۲** $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -[0^-] = 1$ (۰/۲۵) $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = b+1$ (۰/۲۵) $\quad f(0) = a \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a=1\\ b=0\end{array}\right.$ (۰/۵)

**۹۳** $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow$ نقاط ناپیوستگی: $x = -3, 4$

**۹۴**

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\xrightarrow{\text{برای دو پیشامد مستقل}}P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

دو پیشامد مستقل هستند.

**۹۵**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0.9=0.7+P(B)-0.5\Rightarrow P(B)=0.7$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.5}{0.7}=\frac{5}{7}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.5}{0.7}=\frac{5}{7}$$

| $P(A)$ | $P(B)$ | $P(A\cup B)$ | $P(A\cap B)$ | $P(A\|B)$ | $P(B\|A)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰/۷ | ۰/۷ | ۰/۹ | ۰/۵ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{5}{7}$ |

**۹۶** A = هر دو عدد رو شده زوج B = مجموع اعداد رو شده برابر ۸

$$A=\{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$$

$$B=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$$

$$(A\cap B)=\{(2,6),(4,4),(6,2)\}$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}\Rightarrow P(A|B)=\frac{3}{5}$$

**۹۷** A = انتخاب در تیم کوهنوردی B = انتخاب در تیم‌ملی فوتبال نوجوانان

الف) باید $P(A\cap B)$ را به دست آوریم و چون پیشامدهای A و B مستقل هستند، پس:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)\Rightarrow P(A\cap B)=0.7\times 0.8=0.56$$

ب) باید $P(A'\cap B')$ را به دست آوریم و چون پیشامدهای 'A و 'B مستقل هستند، پس:

$$P(A')=1-P(A)\Rightarrow P(A')=1-0.7=0.3$$

$$P(B')=1-P(B)\Rightarrow P(B')=1-0.8=0.2$$

$$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')\Rightarrow P(A'\cap B')=0.3\times 0.2=0.06$$

پ) باید $P(A-B)$ را به دست آوریم. پس:

$$P(A-B)=P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A-B)=0.8-0.56=0.24$$

ت) باید $P(A-B)+P(B-A)$ را به دست آوریم. پس:

$$P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow P(B-A)=0.7-0.56=0.14$$

$$P(A-B)+P(B-A)=0.24+0.14=0.38$$

ث) باید $P(A\cup B)$ را به دست آوریم پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cup B)=0.7+0.8-0.56=0.94$$

**۹۸** ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

۱۹, ۱۷, ۱۵, ۱۲, ۱۲, ۱۱, ۱۰, ۸, ۷, ۵, ۴

الف) چون تعداد داده‌ها فرد است، داده وسط میانه است.

ب) دامنه تغییرات = بزرگترین داده - کوچکترین داده ⇒ دامنه تغییرات = ۱۹ - ۴ = ۱۵

ج) مد: تکرار عدد ۱۲ بیشتر از سایر داده‌هاست. مد = ۱۲

**۹۹** الف)

$$\bar{x}_{mina} = \frac{۲۷ + ۲۶ + ۲۵ + ۲۴ + ۲۳}{۵} = \frac{۱۲۵}{۵} = ۲۵$$

$$\bar{x}_{maryam} = \frac{۳۵ + ۳۰ + ۲۵ + ۲۰ + ۱۵}{۵} = \frac{۱۲۵}{۵} = ۲۵$$

$$\sigma^{۲}_{mina} = \frac{(۲۵ - ۲۷)^{۲} + (۲۵ - ۲۶)^{۲} + (۲۵ - ۲۵)^{۲} + (۲۵ - ۲۴)^{۲} + (۲۵ - ۲۳)^{۲}}{۵}$$

$$= \frac{۴ + ۱ + ۰ + ۱ + ۴}{۵} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

$$\sigma^{۲}_{maryam} = \frac{(۲۵ - ۳۵)^{۲} + (۲۵ - ۳۰)^{۲} + (۲۵ - ۲۵)^{۲} + (۲۵ - ۲۰)^{۲} + (۲۵ - ۱۵)^{۲}}{۵}$$

$$= \frac{۱۰۰ + ۲۵ + ۰ + ۲۵ + ۱۰۰}{۵} = \frac{۲۵۰}{۵} = ۵۰$$

پ) برای مینا چون پراکندگی پول توجیبی آن کم‌تر است.

**۱۰۰**

$$\bar{x} = \frac{۶۳ + ۵۰ + ۶۴ + ۲۳ + ۴۵ + ۱۷ + ۷۴ + ۵۳ + ۲۶ + ۵۹ + ۳۲}{۱۱} = \frac{۵۰۶}{۱۱} = ۴۶$$

$$\sigma^{۲} = \frac{(۴۶ - ۶۳)^{۲} + \dots + (۴۶ - ۵۹)^{۲} + (۴۶ - ۳۲)^{۲}}{۱۱}$$

$$= \frac{۲۸۹ + ۱۶ + ۳۲۴ + ۵۲۹ + ۱ + ۸۴۱ + ۷۸۴ + ۴۹ + ۴۰۰ + ۱۶۹ + ۱۹۶}{۱۱} = \frac{۳۵۹۸}{۱۱} = ۳۲۷$$

$$\Rightarrow \sigma^{۲} = ۳۲۷/۰۹ \Rightarrow \sigma = ۱۸/۰۸ \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۱۸/۰۸}{۴۶} = ۳۹٪$$